

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Ben Bella Oran 1

Institut Des Sciences Et Techniques Appliquées

POLYCOPIE
Résistance des Matériaux

Cours et exercices

Elaboré par :

Mr. Mohammed CHAIB

Année universitaire 2018/2019



Préface

Dans le présent polycopié intitulé «*Résistance des Matériaux*», qui s'adresse dans l'intégralité aux étudiants de 1er année *Licence professionnelle, spécialité Mesure Physique et Instrumentation Scientifiques*, et une partie pour la spécialité optique visuelle et lunetière, l'accent est mis sur les bases principales de la résistance des matériaux, la vérification de la tenue en sollicitations simples des structures qui peuvent endurer durant la mise en service, de sorte à permettre à l'étudiant de calculer les déformations de tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en différents matériaux.

Il est rédigé de manière simplifiée et beaucoup d'exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et ait une vision claire de son application dans la vie courante. Des applications sont accompagnées avec leurs solutions dans quelques chapitres. A la fin de chaque chapitre, des exercices sans solutions sont donnés pour que l'étudiant s'y entraîne.

Ce polycopié est divisé en sept chapitres. Le contenu du premier chapitre est une introduction générale à la résistance des matériaux. Aux chapitres 2 et 3, l'étudiant se familiarise avec les notions d'effort normal traction-compression. Le calcul des caractéristiques géométriques des sections planes, pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Tandis que pour toutes les autres types de sollicitations, la forme et les dimensions de la section

droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion.

Il s'agit de la torsion et la flexion simple, respectivement aux chapitres 4 et 5. Dans le chapitre 6, on aborde le cisaillement. Enfin, le dernier chapitre, est consacré au flambement.

Sommaire

Chapitre I: Introduction à La Résistance Des Matériaux	9
I.1.a. Introduction	9
I.1.b. Buts de la résistance des matériaux	9
I.2. Les hypothèses de la résistance des matériaux	9
I.3. Convention de signe des axes	11
I.4. Action mécanique	11
1.4.1. Force	11
1.4.2. Moment	12
I.5. Réaction d'appui	13
I.5.1. Appui simple	13
I.5.2. Appui double (articulation)	13
I.5.3. Encastrement	14
I.6. Identification de la nature des sollicitations :	14
I.6.1. Sollicitations simples :	14
I.6.2. Sollicitations composées :	15
I.7. Application :	16
I.7.1. Enoncé :	16
I.7.2. Corrigé :	16
EXERCICES	19
Chapitre II : Effort normal traction-compression	22
II.1. Généralités	22
II.2. Effort normal et contrainte normale	22
II.2.1. Effort normal	23
II.2.2. Contrainte normale	24
II.2.2.1. Loi de Hooke	24
II.2.3. Courbe contrainte –déformation	25
II.3. Critère de résistance	28
II.4. Calcul de La déformation	30
II.4.1. déformations longitudinale	30
II.4.2. déformations transversales	31
II.5. Système Hyperstatique	32
EXERCICES	33
Chapitre III: Caractéristiques Géométriques des Sections	39

III.1. Généralités.....	39
III.2. Centre de gravité.....	39
III.3. Moment statique	40
III.4. Moment d'inertie	41
III.4.2. Moment d'inertie polaire	41
III.4.3. Moment d'inertie centrifuge	42
III.5. Transformation des moments d'inertie.....	42
III.5.1. Translation d'axes le théorème d'Huygens	42
III.5.2. Rotation d'axes.....	44
III.6. Moments d'inertie principaux.....	45
EXERCICES	46
Chapitre IV: Torsion	53
VI.1. Généralités :	53
VI .2.Contraintes et déformations	53
VI .3. Calcul de résistance a la torsion	57
EXERCICES	58
Chapitre V: Flexion	61
V.1. Généralités :	61
V.2. Contraintes normales en flexion.....	61
V.2.1. Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal	63
V.2.2. Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal.....	64
V.3. Contraintes tangentielles en flexion.....	64
V .4. Calcul de résistance	66
EXERCICES	67
Chapitre VI: Cisaillement	70
VI.1. Généralités :	70
VI.2. Déformation en cisaillement	70
VI.2.1. Condition de résistance	71
VI.3. Calcul des assemblages.....	72
VI.3.1. calcul au cisaillement.....	72
VI.3.2. calcul de froissement	73
VI.3.3. Vérification de traction compression.....	73
VI.4. Assemblage par plusieurs rivets et boulons	74
VI.4.1. Calcul au cisaillement.....	74

VI.4.2-calcul de froissement	74
VI.4.3.Vérification de traction compression.....	75
EXERCICES	76
Chapitre VII: Flambement	79
VII.1. Généralités	79
VII.2. Force Critique	80
VII.3. Longueur effective: (condition de fixation).....	81
VII.4. Contrainte critique de flambement.....	82
EXERCICES	85

Liste des Symboles

S_x, S_y	Les moments statiques d'une section
X_G, Y_G	Coordonnées du centre de gravité
G	Centre de gravité
I_x, I_y	Moments d'inertie axiaux
I_{xy}	Moment d'inertie centrifuge
I_p	Moment d'inertie polaire
I_{max}	Moment d'inertie axial maximal
I_{min}	Moment d'inertie axial minimal
W_{max}	Module de résistance maximal
W_{min}	Module de résistance minimal
i_x, i_y	Rayons de giration
M_y, M_z	Moments de flexion dans une section
T_y, T_z	Efforts tranchants dans une section
N_x	Effort normal dans une section
σ_x	Contrainte normale selon la direction x
τ_{xy}, τ_{xz}	Contraintes tangentielles sur la facette de normale x
K	Coefficient de forme d'une section
σ_{Eq}	Contrainte normale équivalente
$[\sigma]$	Contrainte normale admissible
$[\tau]$	Contrainte tangentielle admissible

f	Flèche d'une poutre
φ	Déformation angulaire d'une poutre
y_n, z_n	Coordonnées de l'axe neutre
σ_{max}	Contrainte normale maximale
σ_{min}	Contrainte normale minimale
τ_{max}	Contrainte tangentielle maximale
τ_{min}	Contrainte tangentielle minimale
θ_p	Direction d'un plan principal
$v(x)$	Déformée dans un élément de structure due au flambement
E	Module de Young
P_c	Charge critique d'Euler
l_f	Longueur de flambement
σ_c	Contrainte critique d'Euler
σ_e	Limite d'élasticité
λ	Elancement d'une barre
λ_c	Elancement critique d'une barre

CHAPITRE I

*INTRODUCTION A LA
RESISTANCE DES MATERIAUX*

Chapitre I:

Introduction à La Résistance Des Matériaux

I.1.a. Introduction

La résistance des matériaux, désignée souvent par la *RDM*, est la science du dimensionnement.

C'est une discipline importante de la mécanique, qui permet de concevoir une pièce ou tout un objet utilitaire, en outre vérifier ça tenu contre les sollicitations et contraintes d'usage. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

I.1.b. Buts de la résistance des matériaux

L'objet de la résistance des matériaux est alors de fournir les conditions de fonctionnement pour une construction donnée, c'est à dire:

- Déterminer si une structure donnée peut supporter les charges appliquées.
- Les efforts appliqués étant connus, dimensionner la structure, et donc vérifier que les déformations induites par les charges sont inférieures aux limites acceptables en fonctionnement.

I.2. Les hypothèses de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux est imposée par des hypothèses qui obéissent à un certain nombre mis en évidence la naissance et le développement de la résistance des matériaux, ces hypothèses sont les suivantes:

a. homogénéité et l'isotropie du matériau:

Un matériau qui possède les mêmes propriétés élastiques en tous points du corps est appelé homogène et un matériau qui possède les mêmes propriétés physiques et mécaniques dans toutes les directions en tous points du solide, est appelé matériau isotrope.

b. L'élasticité et la linéarité du matériau:

Dans le domaine élastique les contraintes et les déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial si l'équilibre élastique est stable quand on élimine l'action extérieure qui était à l'origine de cette déformation.

c. La petitesse des déformations:

La déformation due à charge est négligeable par rapport aux dimensions de la pièce et la configuration géométrique de cette dernière reste inchangeable.

d. Hypothèse des sections planes :

Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

e. Hypothèse de Saint Venant:

Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant, cette hypothèse simplificatrice conduite à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

1.3. Convention de signe des axes

On utilise le système Cartésien pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs des ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.1), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'un vis tournant vers le haut ou le bas.

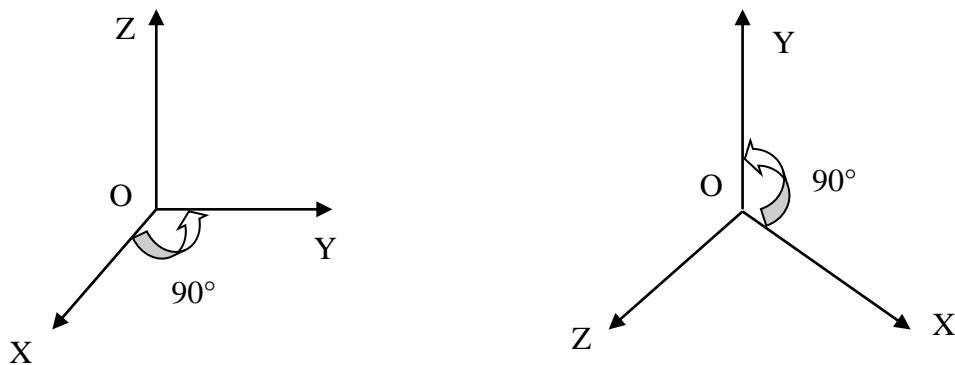


Fig I.1-Convention de signe des axes.

1.4. Action mécanique

1.4.1. Force

On appelle force, l'action mécanique qui s'exerce sur un solide susceptible de créer un mouvement ou encore de créer une déformation. Une force est toujours appliquée en un point, elle est modélisable par l'ensemble d'un point et d'un vecteur: (\vec{F}) .

L'intensité $\|\vec{F}\|$ se mesure en Newtons (N).

on appelle résultante de deux forces est la somme de deux forces et s'exprime par:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (\text{I.1})$$

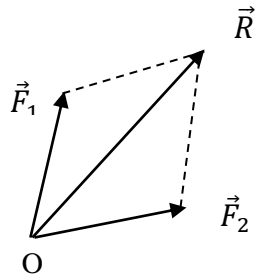


Fig I.2-Résultante de deux forces

Dans la plus part des cas, on décompose une force F en deux composantes F_x et F_y suivant deux axes perpendiculaires entre eux (voir Fig. 1.3). A partir de cette figure

on obtient:

$$F_x = F \cos \alpha \quad ; \quad F_y = F \sin \alpha \quad (I.2)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (I.3)$$

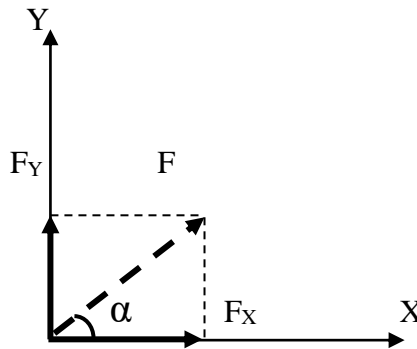


Fig I.3-Composantes d'une force.

1.4.2. Moment

Le moment de F par rapport à l'axe OXY (Fig. 1.4) est un vecteur perpendiculaire au plan du solide, son sens dépend de la position de la force par rapport à l'axe X. Le

moment est défini comme suivant:

$$M = F x_1 \quad (I.4)$$

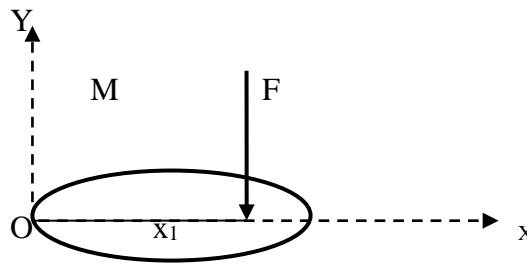


Fig I.4-Schématisation d'un moment

I.5. Réaction d'appui

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Ces liaisons dans le plan sont de 3 sortes:

I.5.1. Appui simple

Un appui simple sert à bloquer un seul déplacement qui se trouve en direction perpendiculaire à la droite joignant les points de contact. Soit une seule réaction d'appui

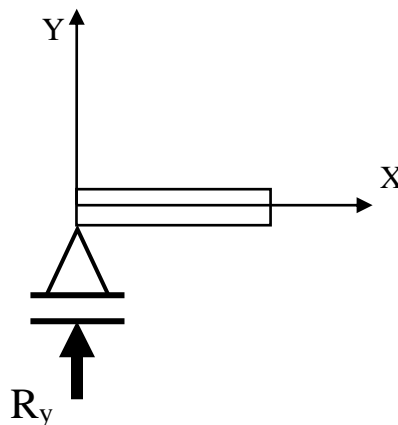


Fig I.5- Appui simple

I.5.2. Appui double (articulation)

Cet appui autorise la rotation d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. L'articulation introduit deux inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen

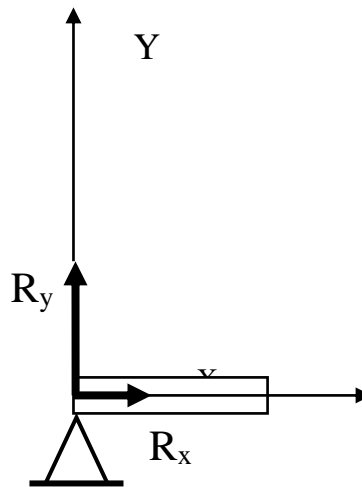


Fig I.6 -Appui double.

I.5.3. Encastrement

L'encastrement schématisé sur la Fig. 1.7 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

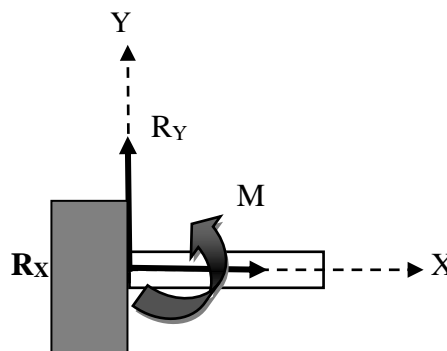


Fig I.7-Encastrement

I.6. Identification de la nature des sollicitations :

I.6.1. Sollicitations simples :

Si une seule composante N , T , M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$	TRACTION (pour la compression, les vecteurs forces sont en sens inverse)	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$	CISAILLEMENT	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$	TORSION	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	FLEXION PURE	

I.6.2. Sollicitations composées :

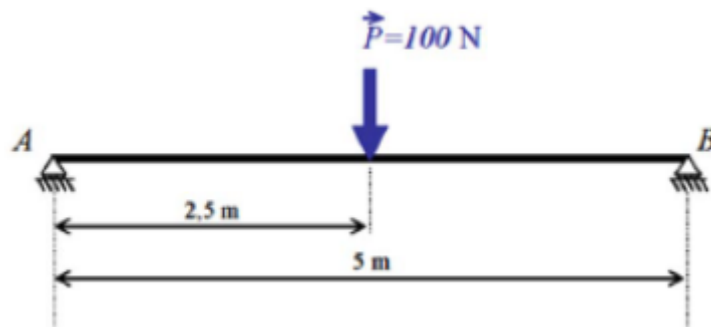
Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	FLEXION PLANE SIMPLE	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	FLEXION + TRACTION	

$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ <p>ou</p> $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	FLEXION + TORSION	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	FLAMBAGE	

I.7. Application :

a)

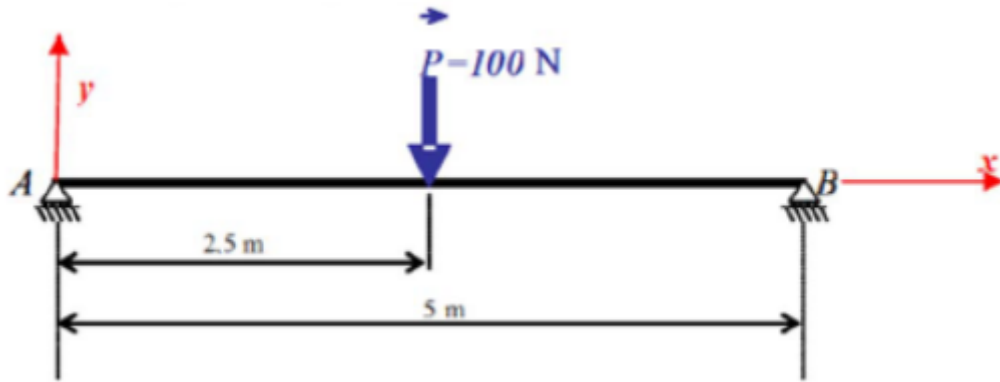


I.7.1. Enoncé :

1. Identifier les liaisons présentes sur la poutre.
2. Mettre en place le repère général.
3. Déterminer les efforts transmis par les liaisons.
4. Déterminer le nombre de tronçons nécessaires à l'étude de la poutre en RDM.
5. Mettre en place les coupures, et les repères associés à chaque coupure.
6. Déterminer le torseur de cohésion dans chaque tronçon.
7. Tracer les diagrammes de sollicitations.

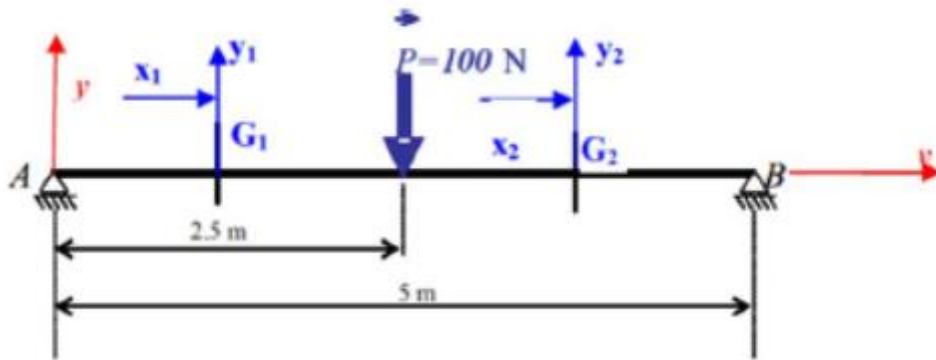
I.7.2. Corrigé :

1. liaisons ponctuelles.
- 2.



3. Déterminer les efforts transmis par les liaisons :

4. L'action P est centrée sur la poutre donc les réactions en A et B sont égales à P/2, soit 50 N et dirigées suivant y.



5. Deux tronçons sont nécessaires à l'étude de la poutre en RDM : AC et CB.

• **Tronçon AC :**

Méthode algébrique :

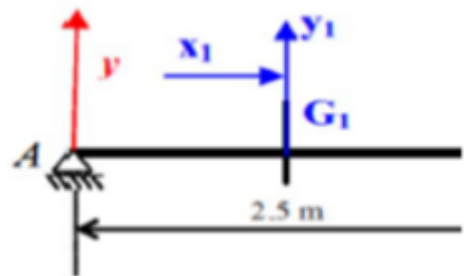
T_{y1} = - réaction à gauche

T_{y1} = $-Y_A$ = -50 N

M_{fz1} = 50 x

Méthode vectorielle :

$$\{\tau_{coh}\} = \begin{Bmatrix} -\vec{A} \\ -\vec{G}_1 \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{G_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_A & 0 \\ 0 & x_1 Y_A \end{Bmatrix}_{G_1}$$



• **Tronçon CB :**

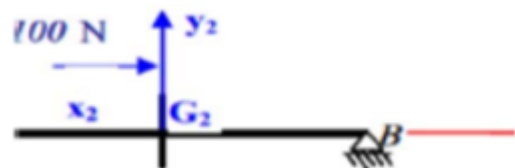
Méthode algébrique :

T_{y2} = réaction à droite

T_{y2} = Y_B = 50 N

M_{fz2} = 50 (5 - x)

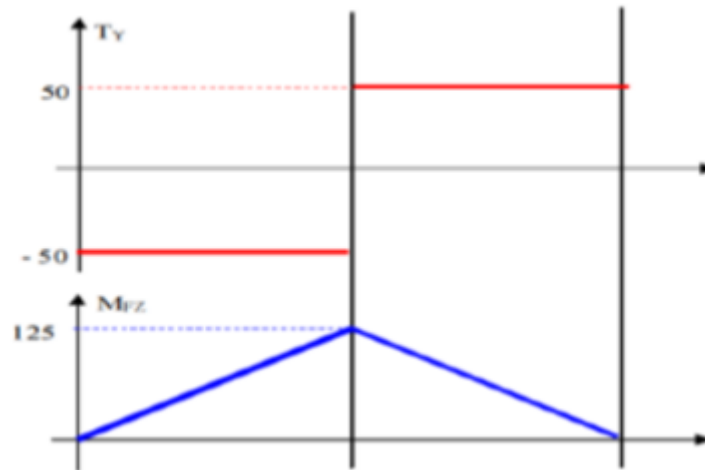
Méthode vectorielle :



$$\{\tau_{coh}\} = \left\{ \frac{\vec{B}}{G_2 \vec{B} \wedge \vec{B}} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 50(5-x) \end{matrix} \right\}_{G_2}$$

Diagrammes de sollicitations :

x(m)	T _y (N)	M _{tz} (N.m)
0	-50	0
2,5	-50	125
5	50	0



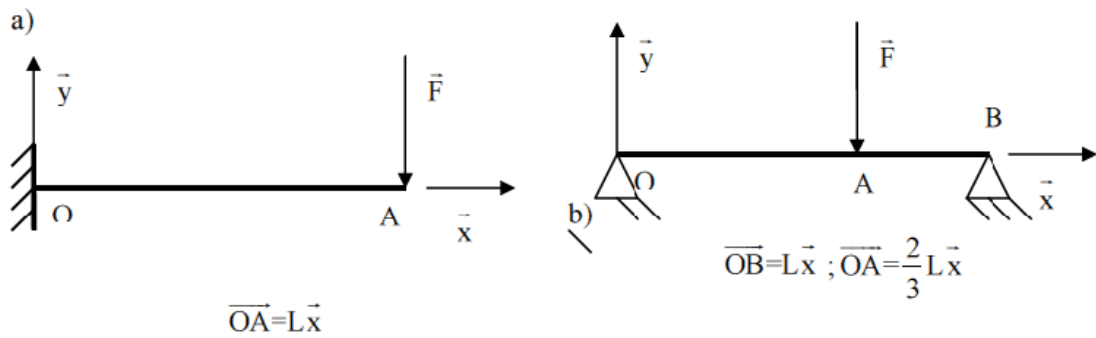
EXERCICES

Exercice 01

Pour chacun des exemples suivants, on demande de :

- Déterminer les actions de liaisons

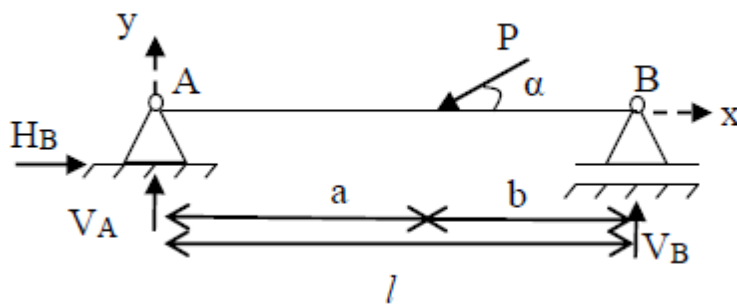
$F=500\text{ N}$, $L=1\text{ m}$.



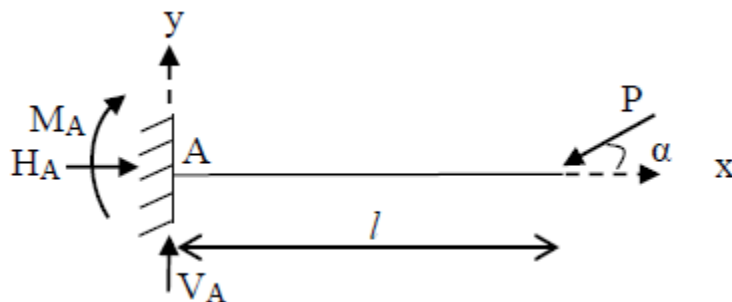
Exercice 02

Détermine les réactions des appuis des poutres ci-dessous :

Poutre 01 :

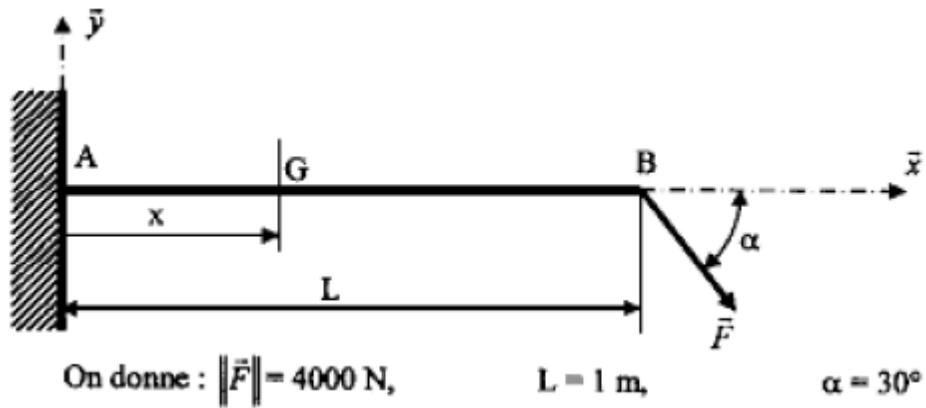


Poutre 02 :



Exercice 03

Soit la poutre encastrée en A et supportant un effort incliné F



1. Calculer la réaction de l'encastrement A (R_A et M_A)

CHAPITRE II

*EFFORT NORMAL
TRACTION & COMPRESSION*

Chapitre II :

Effort normal traction-compression

II.1. Généralités

Un corps est sollicité à la traction ou bien la compression lorsqu'il est soumis à l'action de deux forces égales, coïncidant avec l'axe longitudinal de ce corps. Ces deux forces tendent à l'allonger ou à le raccourcir.

Traction : l'effort suivant la fibre neutre qui tend à l'allonger.

Compression : l'effort suivant la ligne neutre de la structure qui tend à la raccourcir.

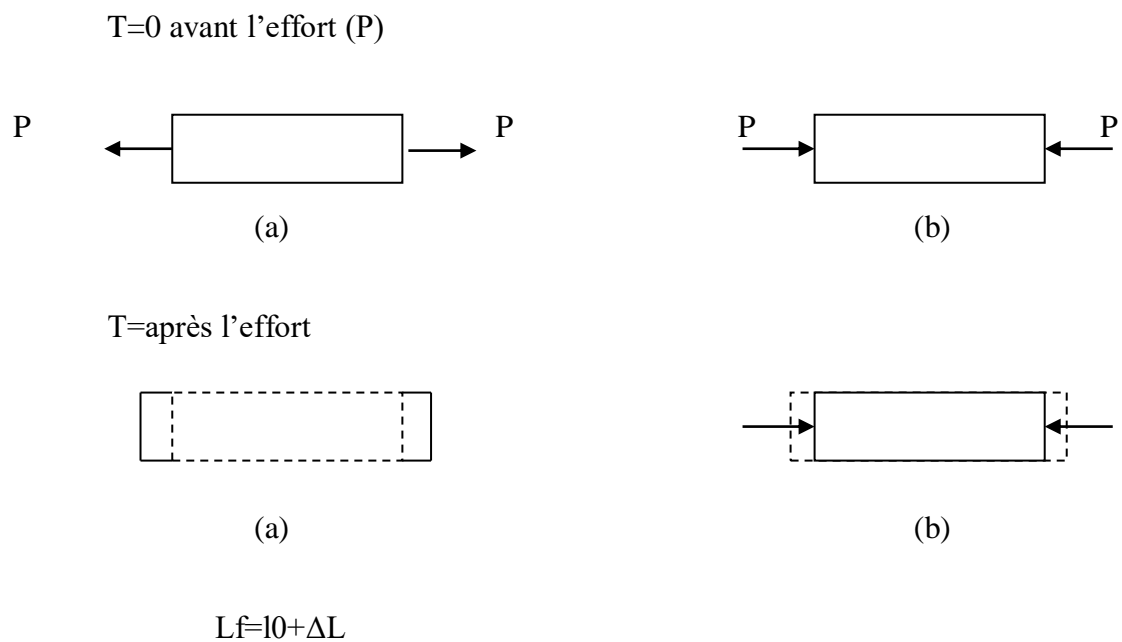


Fig II.1- un solide sollicité à la (a) traction & (b) compression

II.2. Effort normal et contrainte normale

Le calcul des contraintes développées et les déformations longitudinales constitue une étape essentielle dans l'analyse et la conception des structures formées d'éléments sollicités par des efforts axiaux.

II.2.1. Effort normal

L'effort normal de traction ou de compression est un effort interne. On se penche vers la méthode des sections pour le déterminer. Sa valeur dans une section droite quelconque d'une barre est égale à la somme algébrique de tous les efforts longitudinaux. Par convention, on considère que l'effort est positif si on a la traction, par contre il négatif on cas de compression

$$N_x = \pm \sum P \pm \int q_x dx \quad (II.1)$$

q_x : Efforts ou bien charges longitudinaux réparties.

P: effort normale.

L'intégrale se déploie sur la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie.

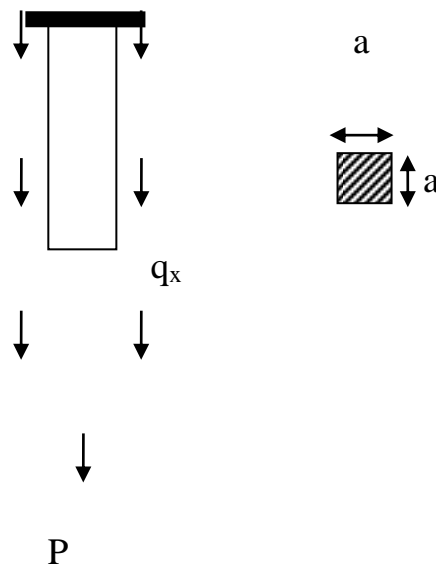


Fig II.2- Un solide sollicité par un effort normal de traction (P)
plus une charge longitudinal reparti q_x

II.2.2. Contrainte normale

La présence de l'effort normal au niveau des sections donne naissance à des contraintes normales. On suppose que dans toutes les sections droites des barres en traction-compression, les contraintes normales sont uniformément réparties. La valeur de la contraintes normale dans une section droite est égale à :

$$\sigma = \frac{N_x}{A} \quad (\text{II.2})$$

N_x : effort normal

A : l'aire de la section droite de la barre

II.2.2.1. Loi de Hooke

Lorsqu'on applique une charge P de traction sur une barre, cette dernière va s'allonger (comme il est mentionné au début de chapitre).

Si exactement le même phénomène qui apparait si une on applique une force sur un ressort, ensuite l'allongement est proportionnelle à la force appliquée.

La plupart des matériaux, il existe une proportionnalité entre les contraintes appliquées, si on veut parler de contrainte, et les déformations engendrées. Cette proportionnalité est traduite par la loi de Hooke.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{II.3})$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (\text{II.4})$$

ε : La déformation relative longitudinale

E : Module de Young ou bien le module d'élasticité longitudinal (MPa).

Exemple : $E=2.10^6$ MPa pour l'acier.

L : longueur initial avant déformation

ΔL : Allongement

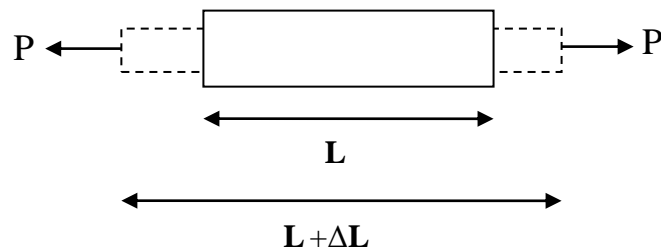


Fig II.3- un solide avant et après déformation sollicité par un effort de traction P

II.2.3. Courbe contrainte –déformation

II.2.3.1. Essai de traction

L'essai de traction a pour but d'étudier les propriétés fondamentales des matériaux pour déterminer les caractéristiques mécaniques. L'essai se fait sur des éprouvettes normalisées de forme cylindrique ou bien prismatique.

L'effort (P) est appliqué progressivement pendant l'essai. On mesure constamment la force de traction (P) ainsi que la déformation longitudinale et parfois la déformation transversale.

A partir des résultats, on trace la courbe contrainte-déformation, en divisant l'effort sur la section initial de la barre, l'allongement ΔL sur la longueur initial de la barre.

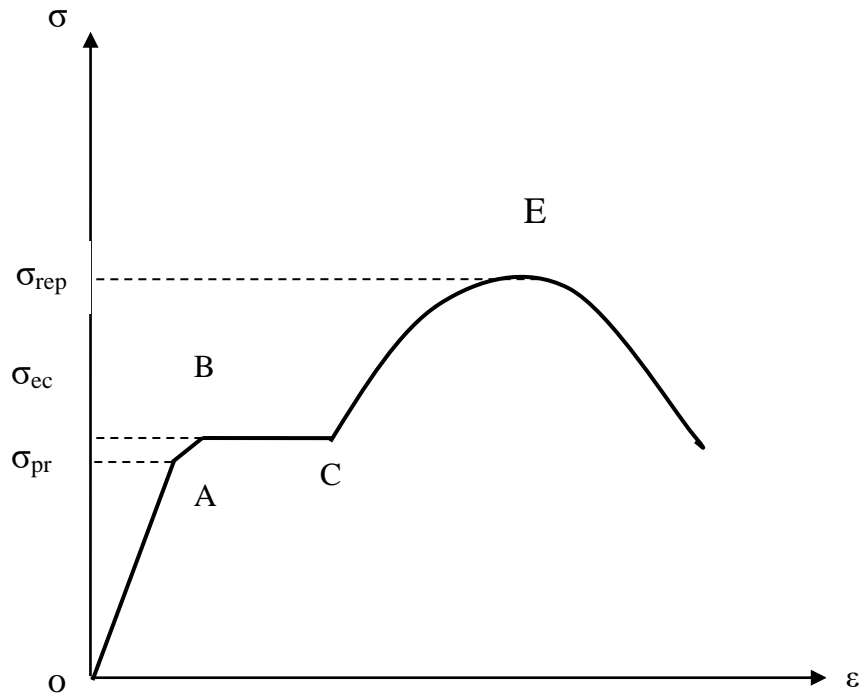


Fig II.4- Courbe contrainte -déformation.

σ_{pr} : Contrainte de proportionnalité

σ_{ec} : Limite d'écoulement

σ_{rep} : Contrainte de rupture

L'étude des propriétés mécaniques des matériaux s'effectue sur des éprouvettes dont on mesure les variations des dimensions sous l'action d'une sollicitation. L'essai le plus simple et le plus pratiqué est l'essai de traction. la Fig II.4 présente l'allure typique de la courbe expérimentale $\sigma = f(\varepsilon)$.

- La droite OA est rectiligne, qui définit le domaine linéaire des matériaux où la contrainte σ est proportionnelle à la déformation ε . A partir du point A débute le

domaine des déformations non linéaire mais le phénomène reste toujours réversible.

- Le point B correspond à la contrainte limite d'élasticité c'est à dire à partir duquel tout chargement supplémentaire et déchargement résulte en déformations résiduelles.
- Entre B et C, l'éprouvette s'allonge sous un effort sensiblement constant. Le palier BC est la zone d'étirement (écoulement).
- La zone CD est la zone de raffermissement (durcissement) ou d'écrouissage. Le sommet D de la courbe correspond à la contrainte de la limite de résistance, l'allongement ne se répartit plus sur la longueur de l'éprouvette, mais se concentre au voisinage d'une section droite dont l'aire diminue rapidement jusqu'à ce que se produise la rupture au point E.

II.2.3.2. Essai de compression

L'éprouvette subit un effort de compression qui augmente d'une manière progressive et cela jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

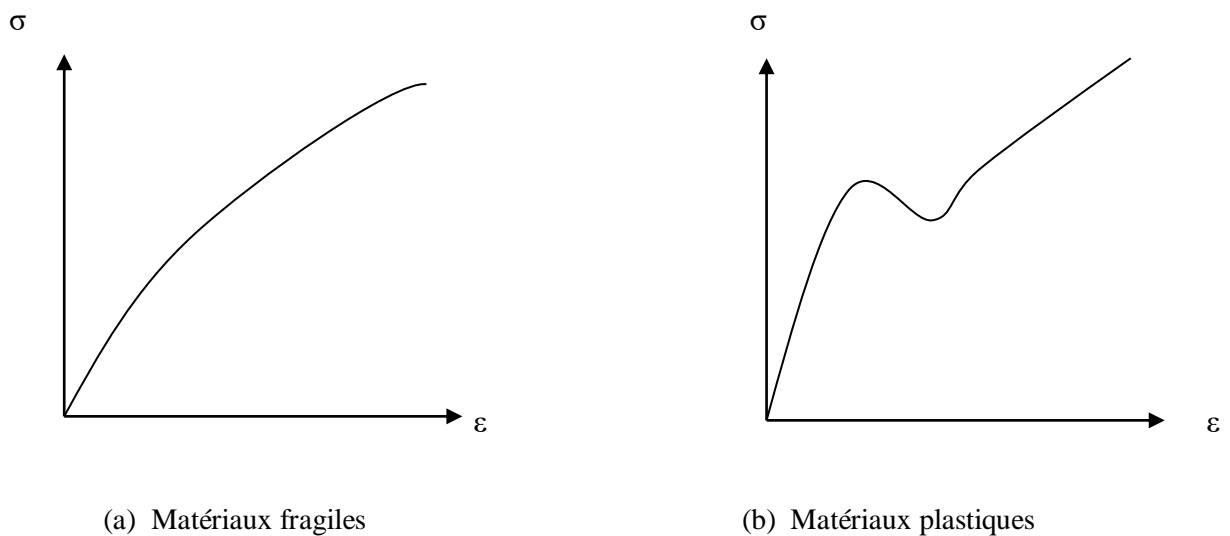


Fig II.5- Courbe contrainte –déformation de compression

(a) Matériaux fragile et (b) Matériaux plastiques

Les matériaux fragiles se cassent brusquement sans passer par la zone d'écoulement.

Les matériaux plastiques ne se détruisent guère.

Les essais de traction et de compression permettent de déterminer la valeur de $[\sigma]$. Tel

$$\text{que } [\sigma] = \sigma_e / n \quad (\text{II.5})$$

n : coefficient de sécurité $1.5 \leq n \leq 2.5$

II.3. Critère de résistance

Soit une barre rectangulaire de longueur L soumise à un effort de traction P ou de compression, La valeur de la contrainte normale est prise toujours maximale pour la vérification à la résistance et le dimensionnement de la pièce étudié et sa dans la section dangereuse droite qui est égale à:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq [\sigma] \quad (\text{II.6})$$

$[\sigma]^-$: Contrainte admissible de compression

$[\sigma]^+$: Contrainte admissible de traction

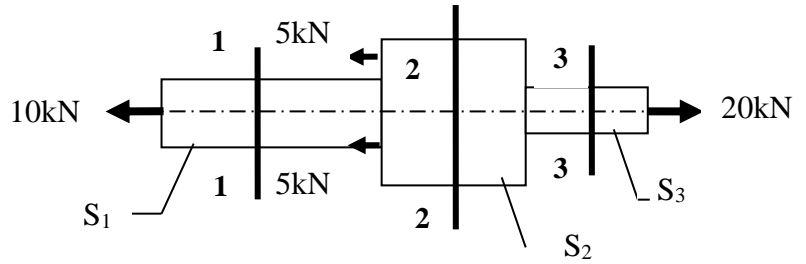
Cette formule permet de résoudre trois types de problèmes :

- Dimensionnement des sections transversales.
- Vérification de la résistance.
- Calcul de la charge admissible.

• Exemple d'application

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous,

sachant que $[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2$.



$$S_1=2.5\text{cm}^2, S_2=4\text{cm}^2, S_3=2\text{cm}^2$$

Solution:

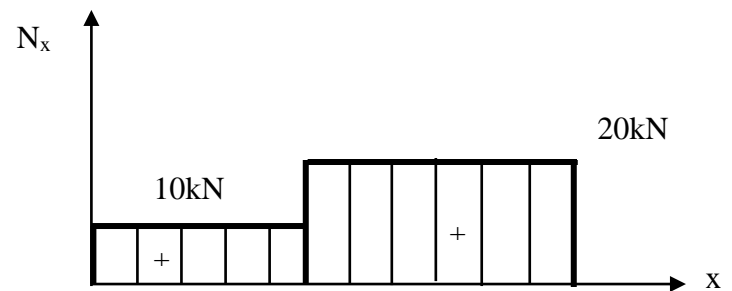
Section 1-1

$$N_1=10\text{kN}$$

$$\sigma=N_1/S_1$$

$$\sigma=10\text{kN}/2.5\text{cm}^2 \rightarrow \sigma=40\text{MPa}$$

normal N_x



- diagramme de l'effort

Section 2-2

$$N_2=10\text{kN}+10\text{kN}=20\text{kN}$$

$$\sigma=N_2/S_2$$

$$\sigma=20\text{kN}/4\text{cm}^2 \rightarrow \sigma=50\text{MPa}$$

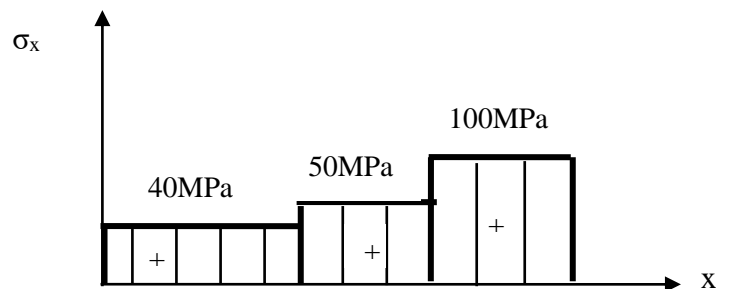
Section 3-3

$$N_3=20\text{kN}$$

normal σ_x

$$\sigma=N_3/S_3$$

$$\sigma=20\text{kN}/2\text{cm}^2 \rightarrow \sigma=100\text{MPa}$$



- diagramme de la contrainte

II.4. Calcul de La déformation

Soit un solide sollicité à la traction ou compression lorsqu'il est soumis à l'action de deux forces égales ou opposées. Ces deux forces tendent à l'allonger si il est sollicité a un effort de traction ou à ce raccourcir si il est soumis a un effort de compression. on distingue deux types de déformation la première est une déformations longitudinale et la deuxième est transversales

II.4.1. déformations longitudinale

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \cdot \quad \sigma = \frac{N}{S} \quad \cdot \quad \sigma = \varepsilon E \quad \Rightarrow \quad \sigma = \left(\frac{\Delta L}{L} \right) E \quad (\text{II.7})$$

$$\Delta L = \frac{NL}{E S} \quad (\text{II.8})$$

La rigidité longitudinale ou l'aptitude d'un élément à se déformer longitudinalement dépend donc des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'élément. Pour une barre composée d'une section variable, la déformation totale est donnée par :

$$\Delta L = \int_L^0 \frac{N dx}{E S} \quad (\text{II.9})$$

Le calcul à partir de la condition de rigidité doit toujours être complété par un calcul de résistance. S'il s'avère que la condition de résistance n'est pas satisfaite, on doit choisir les dimensions de la barre à partir de la condition de résistance.

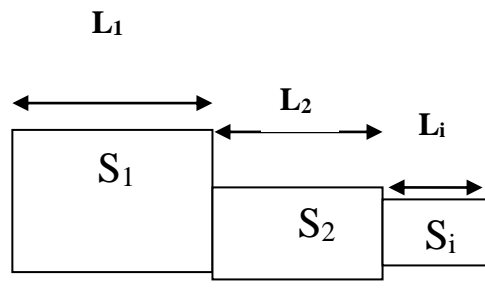


Fig II.6- Présentation d'un solide section variable
sollicité par un effort de compression P

II.4.2. Déformations transversales

La traction et la compression s'accompagnent d'une modification des sections transversales de la barre. Les déformations transversales absolues de la barre sont (Δa) et (Δb)

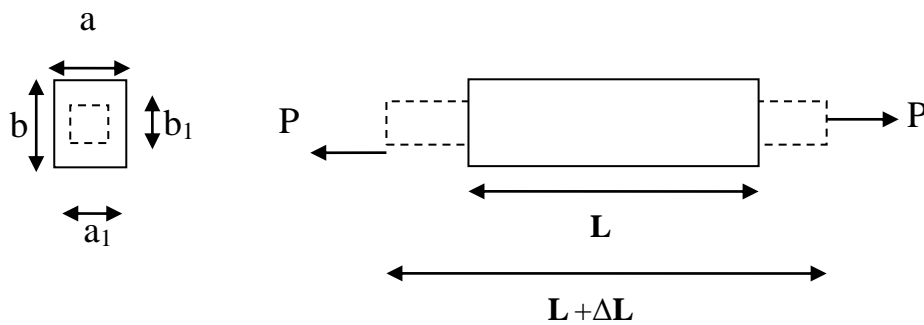


Fig II.7-Déformation transversale d'un solide sollicité par un effort de traction P.

$$\Delta b = b - b_1$$

$$\Delta a = a - a_1$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta a}{a} \quad (\text{II.10})$$

$\bar{\varepsilon}$: la déformation transversale d' un solide.

$$\mu = \left| \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \right| \quad (\text{II.11})$$

μ : est appelé coefficient de poisson.

$$\bar{\varepsilon} = \mu\varepsilon = -\mu(\sigma/E) \quad (\text{II.12})$$

II.5. Système Hyperstatique

On appelle structures hyperstatiques les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations statiques. La résolution de ces systèmes s'effectue en considérant les aspects décrits ci-dessous:

- 1/ Aspect statique : écrire les équations d'équilibre des barres sectionnées.
- 2/ Aspect géométrique: établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique.
- 3/ Résolution du système d'équations.

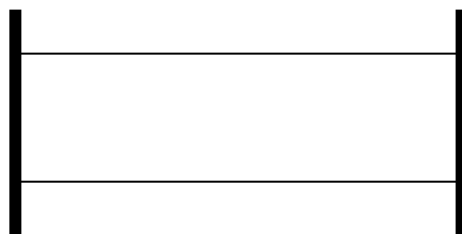
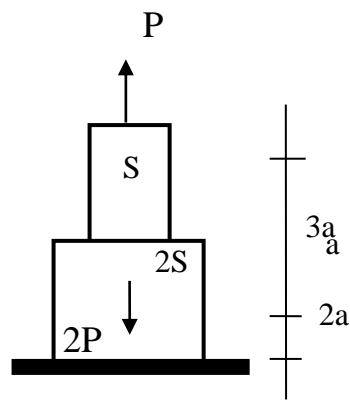


Fig II.9-Présentation d'une poutre hyperstatique
doublement encastrée

EXERCICES

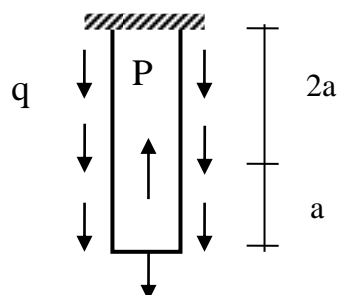
Exercice 01

Construire le diagramme de l'effort longitudinal N_z de la contrainte σ_z et du déplacement de section δ_z pour la barre représentée dans la figure ci-dessus.



Exercice 02

Construire le diagramme de l'effort longitudinal N_z pour la barre soumise à des forces extérieures comme l'indique la figure suivante avec $P = 40\text{KN}$, $q = 20\text{KN/m}$.

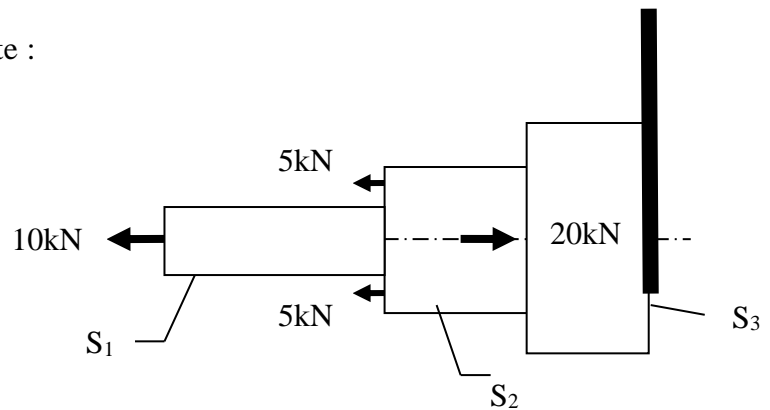


P1

P

Exercice 03

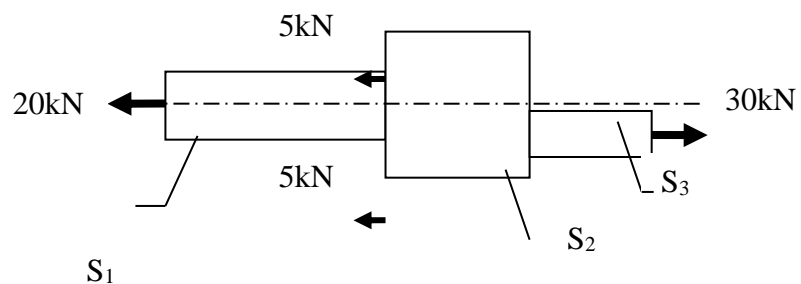
construire le diagramme de l'effort longitudinal N_z et de la contrainte σ_z pour la barre représentée sur la figure suivante :



$$S_1=2.5\text{cm}^2 , S_2=4\text{cm}^2 , S_3=2\text{cm}^2$$

Exercice 04

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que $[\sigma]=40 \text{ kN/cm}^2$.



$$S_1=2.5\text{cm}^2 , S_2=4\text{cm}^2 , S_3=2\text{cm}^2$$

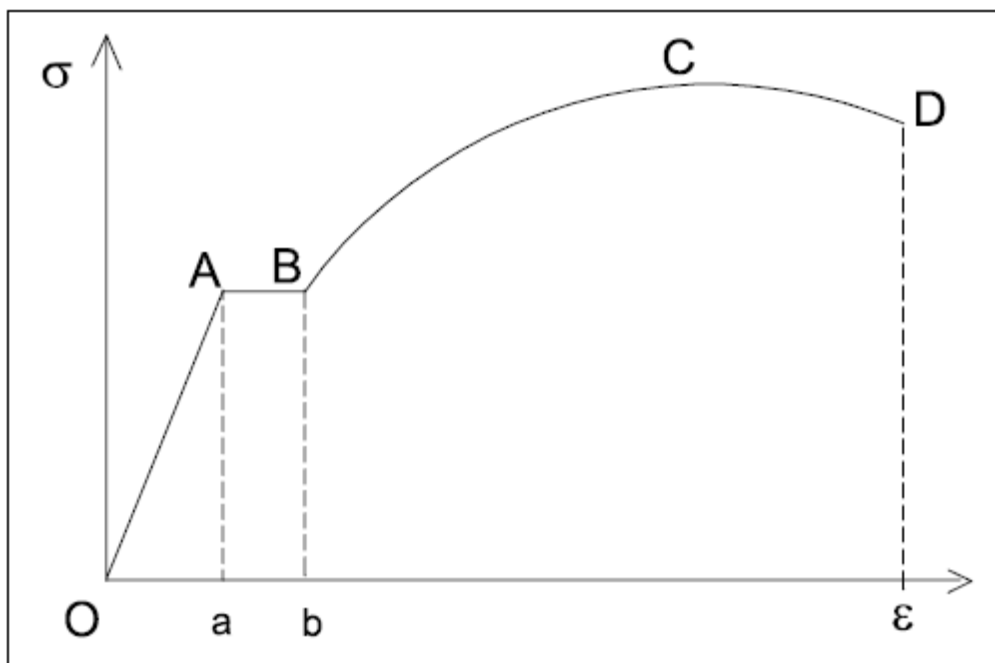
Exercice 05

Considérons une éprouvette d'acier doux de 200 mm de longueur sur laquelle on applique un effort de traction.

Une courbe de la forme indiquée à la figure ci-dessous, est ainsi obtenue.

Les coordonnées des différents points de la courbe sont :

A : $\epsilon = 0,12 \%$	B : $\epsilon = 2,4 \%$	C : $\epsilon = 19 \%$	D : $\epsilon = 25 \%$
$\sigma = 240 \text{ MPa}$	$\sigma = 240 \text{ MPa}$	$\sigma = 420 \text{ MPa}$	$\sigma = 380 \text{ MPa}$



1. Indiquez la valeur de la limite élastique (en MPa) ainsi que celle du module de Young.
2. Quelle est la limite de rupture ? Donnez l'allongement de rupture en centimètres.

Exercice 06

Soit la vis ci-dessous de longueur 150 mm et de diamètre 16mm, en équilibre sous l'action des deux forces F_1 et F_2 d'intensité chacune 1000 daN. La vis est en acier et son module d'élasticité longitudinal est de 200 GPa.



1. A quel type de contrainte est soumise la vis ?
2. Calculer la valeur de la contrainte.
3. Si on adopte un coefficient de sécurité de 4, calculer la résistance élastique de l'acier.
4. Déterminer l'allongement de la vis.

Exercice 07

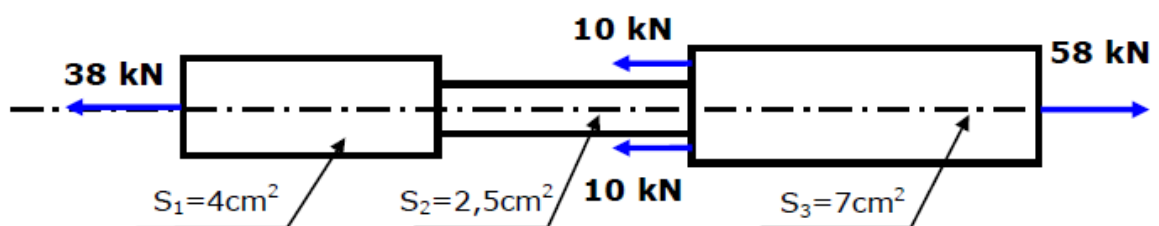
Un câble de diamètre 8 mm et de longueur 300m réalisé en acier de module d'élasticité

$E=200\text{GPa}$ et $Re = 295 \text{ MPa}$ est soumis à une contrainte de 40MPa .

- 1- Vérifier que le coefficient de sécurité appliqué à ce câble est supérieur à 4.
- 2- Calculer la force appliquée à ce câble.
- 3- Calculer l'allongement de ce câble.
- 4- Calculer l'allongement relatif.
- 5- Déterminer le diamètre que devrait avoir ce câble si le coefficient de sécurité est supérieur ou égal à 10.

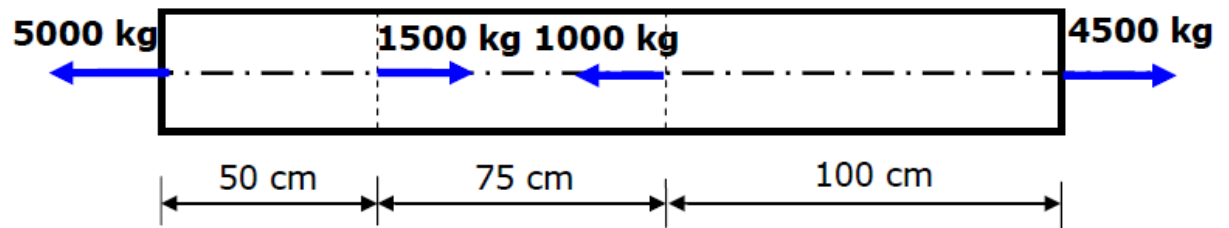
Exercice 08

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que $[\sigma_{adm}]=14 \text{ kN/cm}^2$.



Exercice 09

Déterminer l'allongement total de la barre métallique, sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young $E = 2,1106 \text{ kg/cm}^2$. La section de la barre est constante et vaut 5 cm^2 .



CHAPITRE III

*CARACTERISTIQUES
GEOMETRIQUES DES SECTIONS*

Chapitre III:

Caractéristiques Géométriques des Sections

III.1. Généralités

La forme et les dimensions d'une section droite d'une poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Centre de gravité
- Moment statique par rapport à une droite
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite
- Moment d'inertie principale
- Moment de résistance

III.2. Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section.

Les coordonnées du centre de gravité sont données par:

$$X_G = \frac{1}{S} \iint_S x \, ds \quad (\text{III.1})$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y \, ds \quad (\text{III.2})$$

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad (\text{III.3})$$

$$X_G = \frac{\sum x_i s_i}{\sum s_i} \quad (\text{III.4})$$

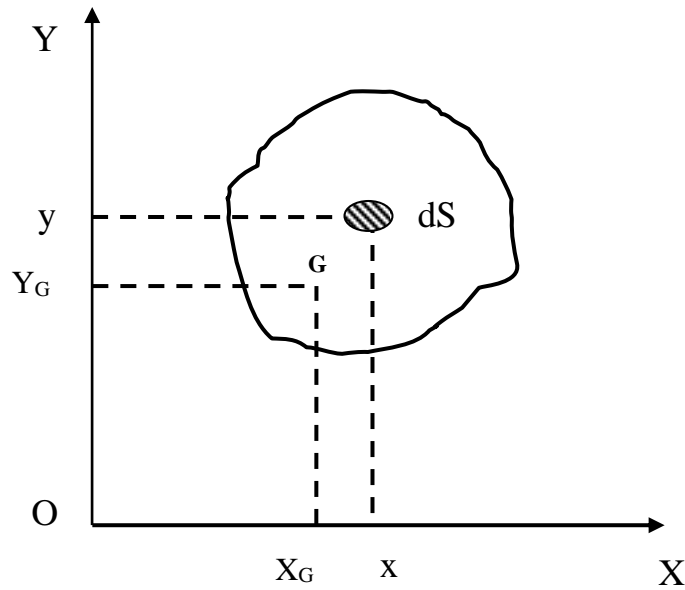


Fig. III.1- Translation des axes.

III.3. Moment statique

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe XOY (Fig. III.1). On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OX et OY les quantités:

$$S_y = \iint_s x \, ds \quad (\text{III.5})$$

$$S_x = \iint_s y \, ds \quad (\text{III.6})$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

$$S_y = S \cdot X_G \quad (\text{III.7})$$

$$S_x = S \cdot Y_G \quad (\text{III.8})$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes Oy et Ox seront respectivement égaux à:

$$S_y = \sum_{i=1}^n s_i x_i \quad (\text{III.9})$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n s_i y_i \quad (\text{III.10})$$

III.4. Moment d'inertie

III.4.1. Définition

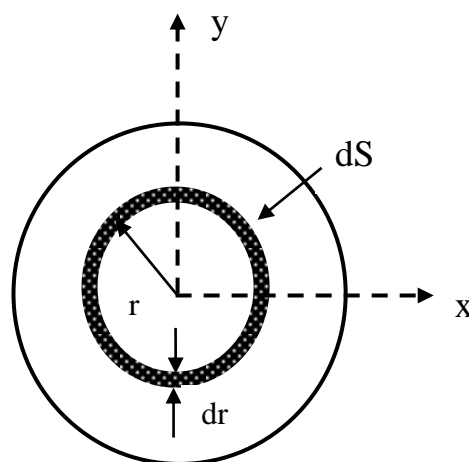
On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le degré de résistance de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section. Ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OX sont les suivants:

$$I_y = \iint_S x^2 ds \quad (\text{III.11})$$

$$I_x = \iint_S y^2 ds \quad (\text{III.12})$$

III.4.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.



$$I_p = \iint_S r^2 ds \quad \text{Fig. III.2- Représentation descriptive d'une section circulaire.} \quad (\text{III.13})$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{cases} I_p = \iint_s (x^2 + y^2) ds \\ I_p = \iint_s x^2 ds + \iint_s y^2 ds \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$$I_p = I_x + I_y \quad (\text{III.16})$$

III.4.3. Moment d'inertie centrifuge

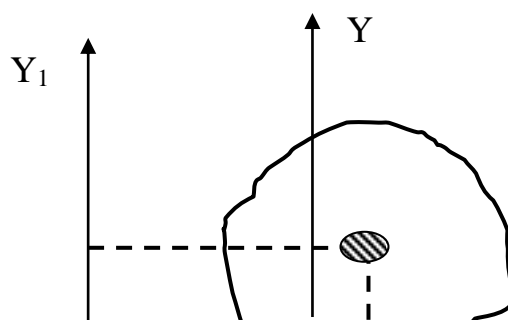
On appelle moment d'inertie centrifuge, l'intégrale des produits des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées x, y le moment produit I_{xy} peut être positif, négatif ou nul.

$$I_{xy} = \iint_s xy ds \quad (\text{III.17})$$

III.5. Transformation des moments d'inertie

III.5.1. Translation d'axes le théorème d'Huygens

Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes.



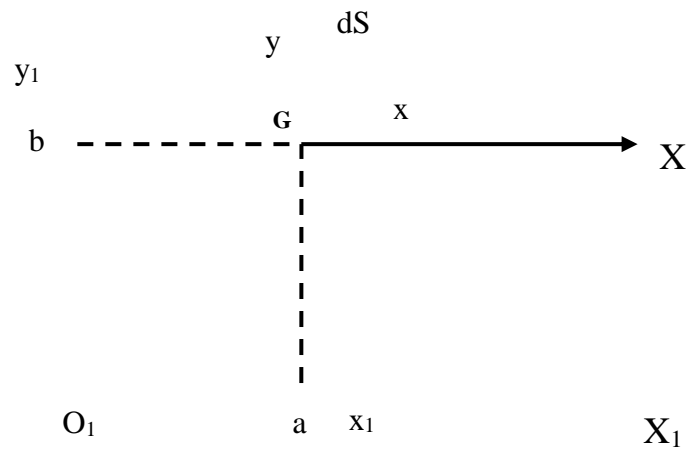


Fig III.3- Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes X_1, Y_1 parallèles à des axes centraux X, Y dont les moments sont supposés connus.

- les moments par rapport à X, Y

$$I_y = \iint_s x^2 ds \quad I_x = \iint_s y^2 ds \quad I_{xy} = \iint_s xy ds \quad \text{(III.18)}$$

- les moments par rapport à Y_1, Z_1

$$I_{y_1} = \iint_s x_1^2 ds \quad I_{x_1} = \iint_s y_1^2 ds \quad I_{x_1 y_1} = \iint_s x_1 y_1 ds \quad \text{(III.19)}$$

Translation d'axes : $y_1 = y + b$ $x_1 = x + a$

$$I_{y_1} = \iint_s (x + a)^2 ds \Rightarrow I_{y_1} = \iint_s (x^2 + 2ax + a^2) ds \quad \text{(III.20)}$$

$$\iint_s a^2 ds = a^2 \cdot S \quad \text{(III.21)}$$

$$\iint_s 2ax ds = 0 \quad ; \quad \iint_s x^2 ds = I_x \quad \text{(III.22)}$$

Donc en conclue que:

$$I_{y_1} = I_y + a^2 \cdot S \quad (\text{III.23})$$

On aurait de même:

$$I_{x_1} = I_x + b^2 \cdot S \quad (\text{III.24})$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + a \cdot b \cdot S \quad (\text{III.25})$$

III.5.2. Rotation d'axes

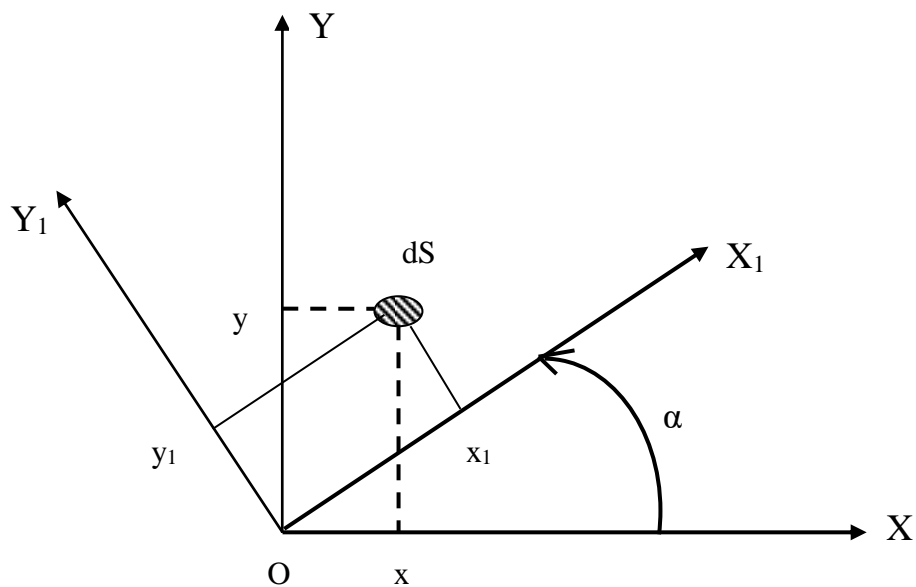


Fig. III.4- Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.

Les moments et produits d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OXY.

Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OX_1Y_1 obtenu par une rotation α des axes initiaux sont donnés par:

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (\text{III.26})$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (\text{III.27})$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (\text{III.28})$$

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} \quad (\text{III.29})$$

$$I_p = I_{p1} \quad (\text{III.30})$$

III.6. Moments d'inertie principaux

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation α . le moment d'inertie centrifuge $I_{YZ} = 0$ en détermine Les valeurs maximales et minimales moment d'inertie I_1 et I_2 .

On obtient ainsi :

$$\text{tg} 2\alpha_o = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{III.31})$$

Pour déterminer (I_{\max}) et (I_{\min}), on peut utiliser le cercle de Mohr. Pour tracer le cercle de Mohr, on suit les étapes suivantes:

- 1- tracer un repère orthogonal et orthonormé (O, IQ, IQR).
- 2- placer les points A(I_x , I_{xy}) et B(I_y , $-I_{xy}$) dans ce repère.
- 3- déduire le point C, point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses.
- 4- déduire du cercle de **Mohr** I_1 et I_2 :

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{III.32})$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{III.33})$$

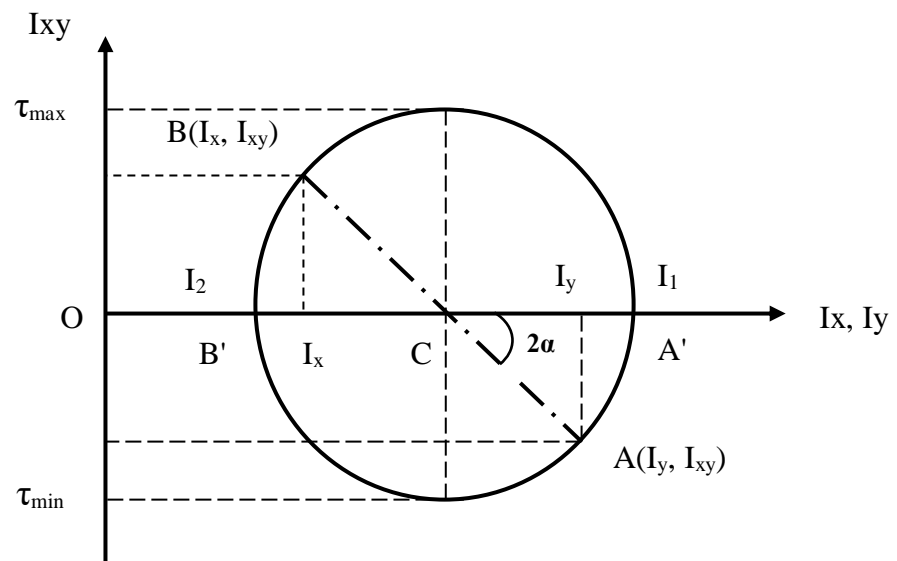
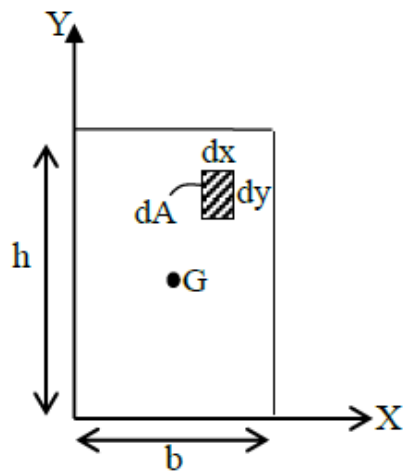


Fig. III.5- Cercle de Mohr.

EXERCICES

Exercice 01

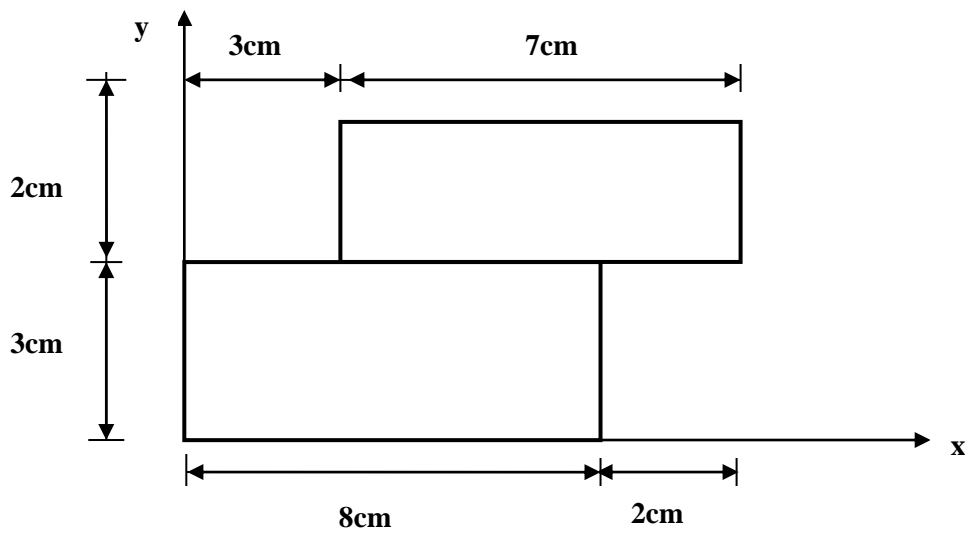
Déterminer le centre de gravité de la section rectangulaire de dimension $b \times h$



Exercice 02

Soit la section représentée ci-dessous. Calculer :

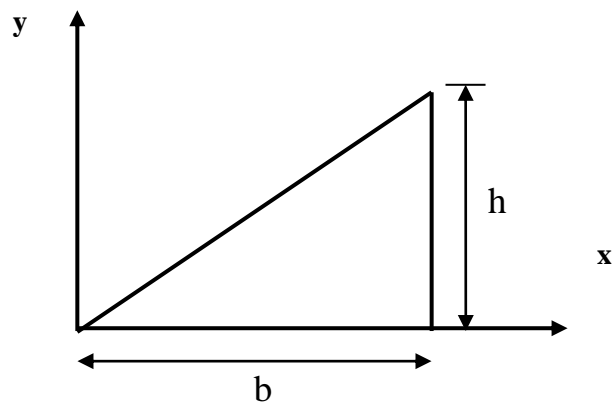
1. le centre de gravité de la section.
2. le moment statique de la section.



Exercice 03

Soit la section représentée ci-dessous. Calculer :

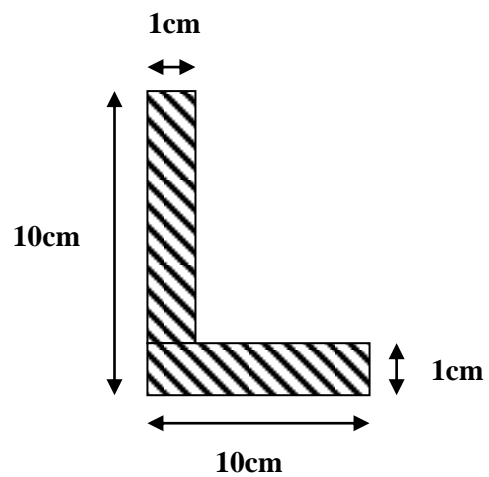
1. le centre de gravité de la section.
2. le moment statique de la section.



Exercice 04

Soit la section en forme de L représentée ci-dessous

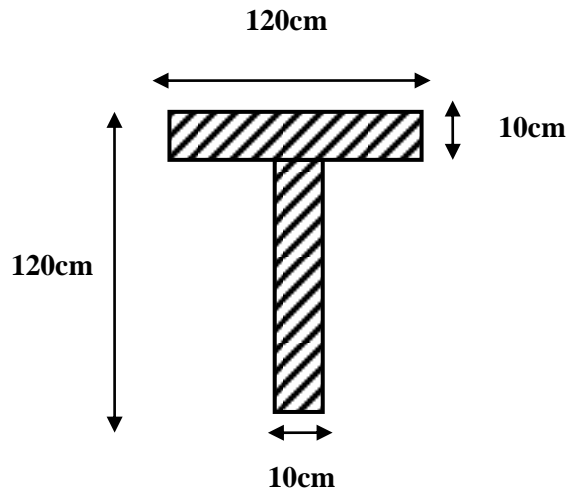
1. Déterminer les moments d'inertie principaux.
2. Déterminer les moments d'inertie centraux.



Exercice 05

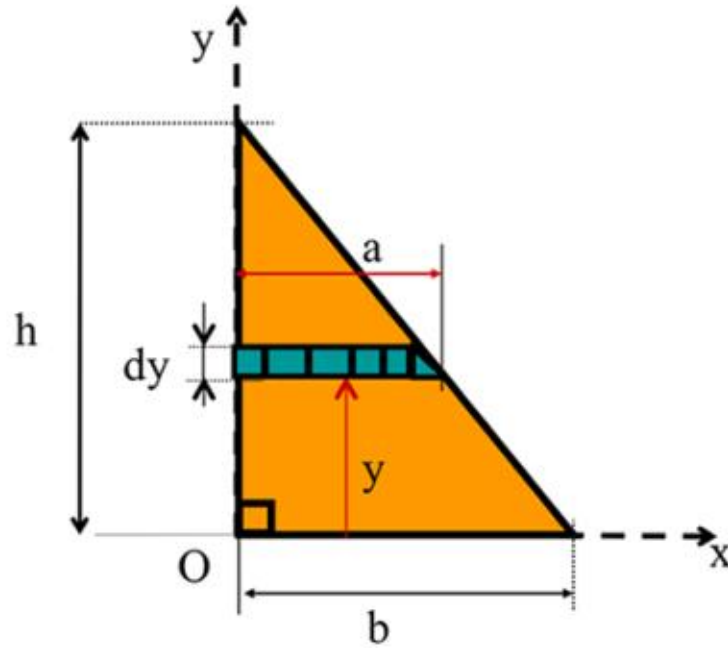
Soit la section en forme de L représentée ci-dessous

1. le centre de gravité de la section.
2. le moment statique de la section.
3. Déterminer les moments d'inertie principaux.
4. Déterminer les moments d'inertie centraux.

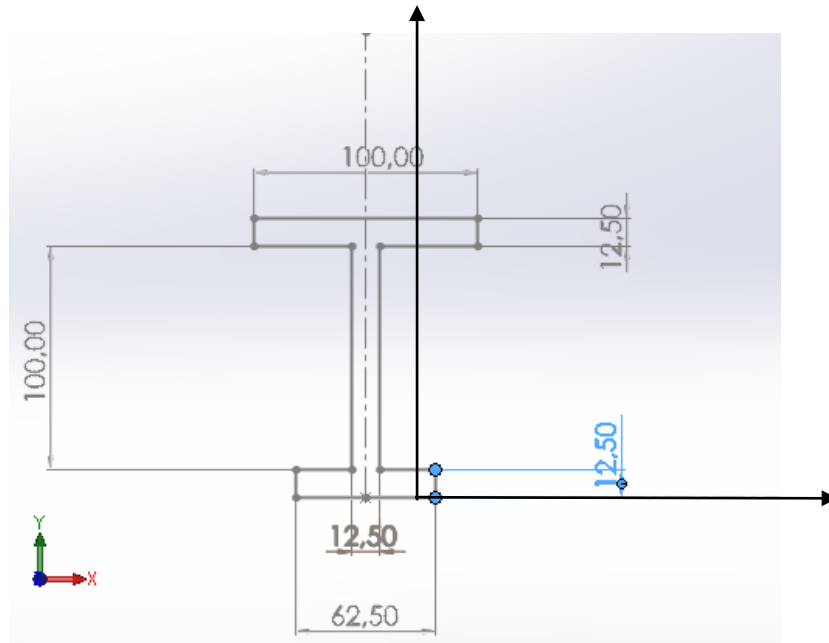


Exercice 06

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.



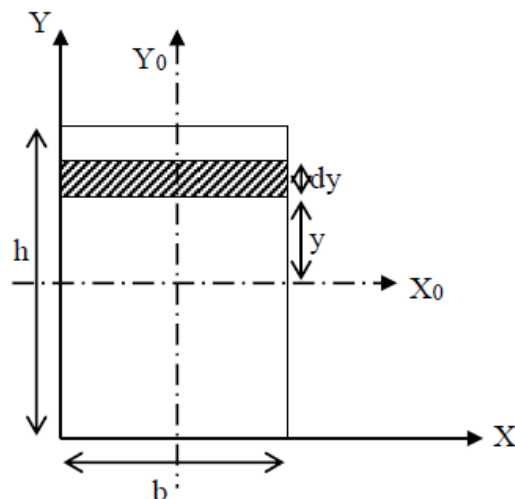
Exercice 07 : déterminer le centre de gravité par rapport à l'axe Y.



Exercice 08

Calculer le moment quadratique de la section rectangulaire ci-dessous par rapport à l'axe X et Y, et par rapport par rapport à l'axe X0 et Y0 (passant par le centre de gravité)

- Vérifier le théorème de Huygens en calculant le moment d'inertie I_x rapport au moment d'inertie I_{X0} .



Exercice 09: déterminer le moment quadratique polaire I_p ainsi que le moment quadratique par rapport à l'axe X (Fig. 5.a).

Ensuite déterminer le moment quadratique de l'anneau (Fig. 5.b)

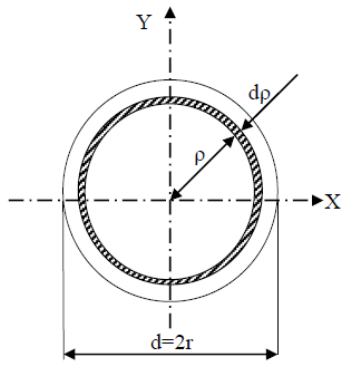


Fig. 5.a

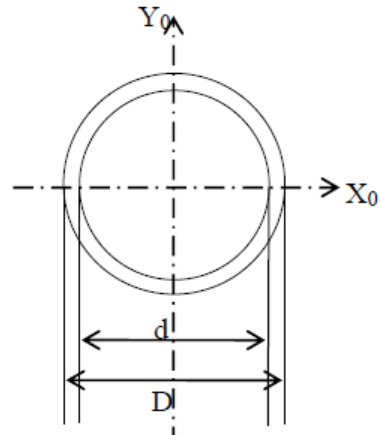
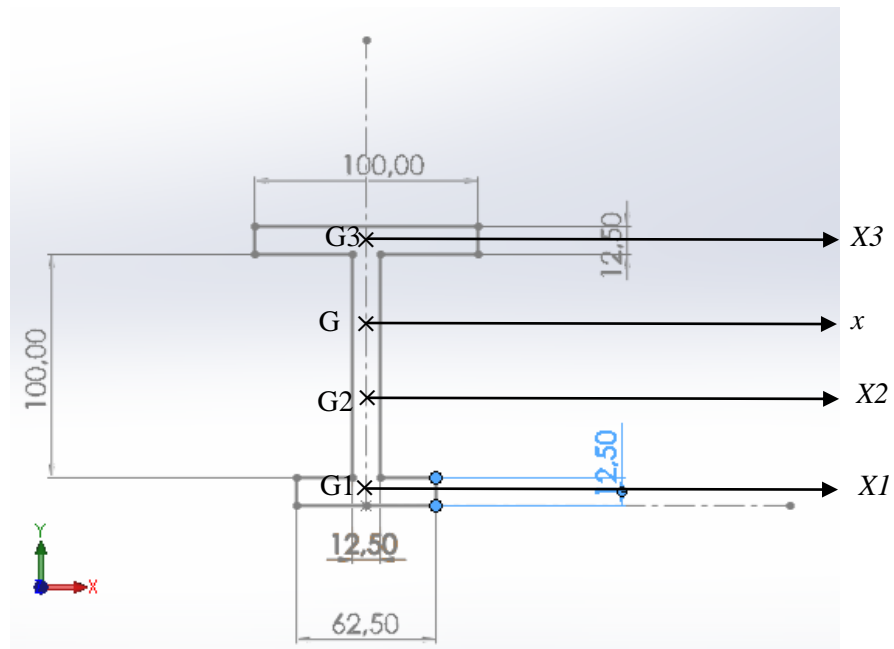


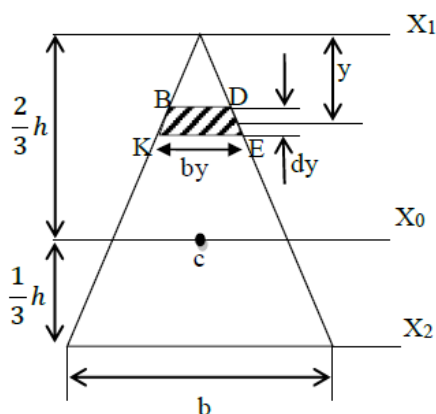
Fig. 5.b

Exercice 10 : déterminer les moments quadratiques par rapport aux axes : I_{GX1} I_{GX2}

I_{GX3} et I_{GX}



Exercice 11: déterminer le moment quadratique de triangle ci-dessous par rapport à l'axe (X1) I_{X1} , ensuite par rapport aux (X0) I_{X0} et l'axe X2 à l'aide de théorème de Huygens.



CHAPITRE IV

TORSION

Chapitre IV:

Torsion

VI.1. Généralités :

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples M et $-M$ égaux et opposés par rapport à son axe longitudinale. Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres entraînés par les moteurs.

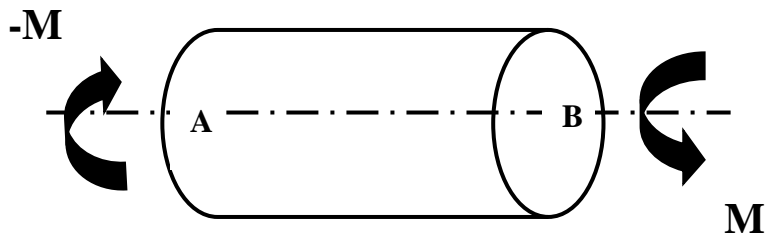


Fig IV.1- Une poutre droite sollicitée en torsion aux extrémités (A et B) deux couples M et $-M$ égaux et opposés.

VI .2.Contraintes et déformations

Lorsqu'une poutre est soumise à un moment de torsion on constate qu'une section quelconque tourne dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse. Si l'angle de rotation est petit, alors la longueur de la barre et le rayon de la section restent inchangés.

On appelle $d\varphi$ l'angle de rotation entre les deux sections droites. La distorsion qui en découle sur une surface cylindrique quelconque est représentée sur la Fig. 2. C'est une quantité locale dépendant du point dans la section.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (\text{IV.1})$$

$$bb' = rd\varphi \quad \text{et} \quad ab = dx \quad (\text{IV.2})$$

$d\varphi/dx$: est la rotation relative

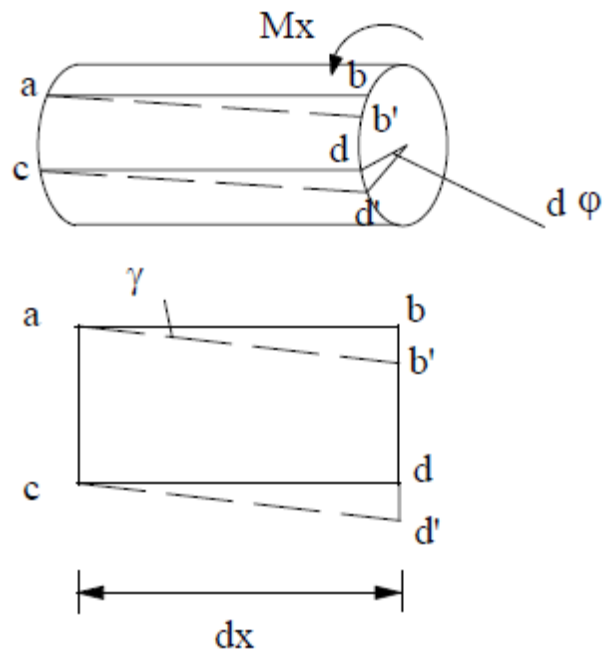


Fig IV.2 -Isolement d'un disque de longueur dx [9]

γ est l'analogie pour la torsion de la déformation ϵ pour la traction. C'est une grandeur sans unité que l'on appelle soit distorsion soit déformation de cisaillement.

En reprenant la Fig. IV.2, et comme on travaille sous l'hypothèse des petites perturbation (HPP), on peut alors aisément calculer la valeur de γ qui est petite. Au premier ordre, on a donc :

$$\tan \gamma \approx \gamma \quad (\text{IV.3})$$

qui traduit une relation locale entre déformation et rotation. On introduit alors la grandeur :

$$\gamma = r \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{IV.4})$$

Appelée angle unitaire de torsion qui est une grandeur globale ne dépendant que de x .

Ainsi on a :

$$\tau = G \gamma \quad (\text{IV.3})$$

$$\tau = G r \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{IV.4})$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle ϕ peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles τ réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_x :

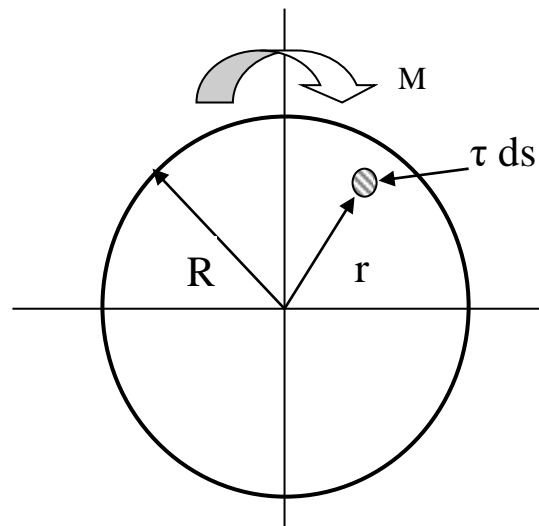


Fig IV.4-Elément de surface ds en coordonnées polaires

$$M_x = \int_s \tau r ds \quad (\text{IV.5})$$

$$M_x = \int_s G r^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right) ds \quad (IV.6)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{G I_p} \quad (IV.7)$$

La quantité $G I_p$ est la rigidité à la torsion

L'expression du moment quadratique polaire:

$$I_p = \int r^2 ds \quad (IV.8)$$

En remplaçant $(d\phi/dx)$ par sa valeur dans l'expression (IV.4), on obtient:

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p} \quad (IV.9)$$

Cette dernière expression permet de calculer la valeur de la contrainte en fonction du moment de torsion et du moment quadratique de la section par rapport à (G, \vec{x}) . En particulier, la contrainte tangentielle maximale dans une section droite est obtenue pour $r = R$, soit:

$$\text{Pour } r = R \quad \tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p} \quad (IV.10)$$

$$W_p = \frac{I_p}{R} \quad (IV.11)$$

W_p : est appelée module de torsion

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenue de l'expression (IV.7)

$$\phi = \int_0^L \frac{M_x}{G I_p} dx \quad (IV.12)$$

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (\text{IV.13})$$

VI .3. Calcul de résistance a la torsion

Lors du calcul des barres à la torsion, on vérifie deux conditions:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p} \leq [\tau] \quad (\text{IV.14})$$

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (\text{IV.15})$$

$[\tau]$: Contrainte de cisaillement admissible

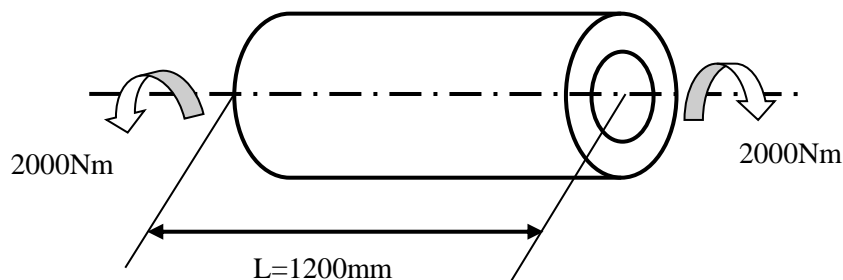
$[\varphi]$: Angle de rotation admissible

Exercices

Exercice 01

Un cylindre est sollicité par un couple de torsion de 2000 mN, le diamètre extérieur D et de diamètre intérieur d , de longueur $L=120\text{cm}$. L'angle de torsion total est de $20^\circ \pm 0.5^\circ$. La contrainte maximale admissible en torsion est de 400 MPa. Le module de COULOMB du matériau vaut 80 GPa.

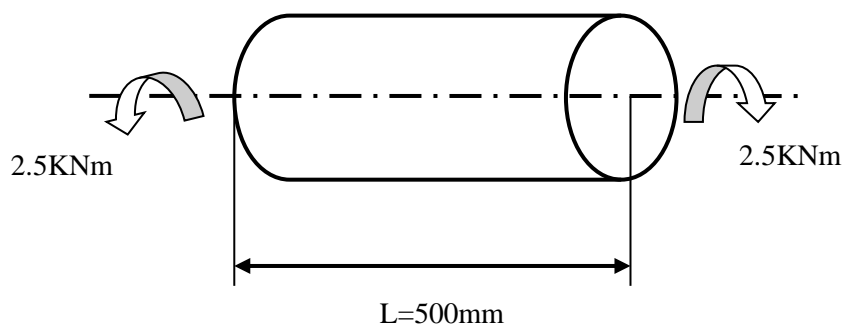
- 1) Calculer la distorsion angulaire maximum en radians en appliquant la loi de HOOKE.
- 2) En déduire le diamètre extérieur D en mm .
- 3) Quel est alors le diamètre intérieur d en mm .
- 4) calculer la contrainte maximum de torsion en MPa et l'angle de torsion des sections extrêmes (en $^\circ$).



Exercice 02

Un cylindre est soumis à un couple de torsion $M = 2.5\text{ kNm}$. Le module de COULOMB du matériau vaut 78 GPa et de diamètre $D=50\text{mm}$. Calculez:

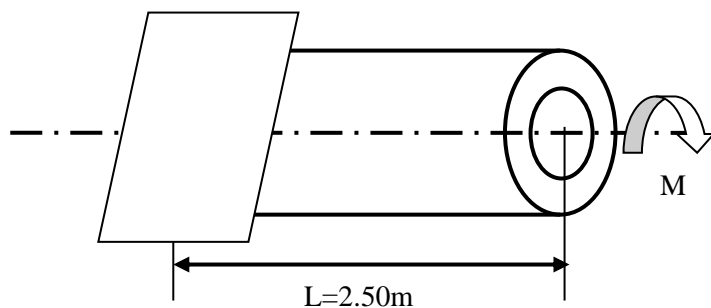
- a) la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.
- b) la distorsion des génératrices en rd et en $^\circ$.
- c) l'angle de rotation des sections extrêmes en rd et en $^\circ$.



Exercice 03

- a) Calculez le couple M qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de 2° sachant que $G = 27 \text{ GPa}$. En déduire la contrainte tangentielle maximum.
- b) Calculez, pour un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.

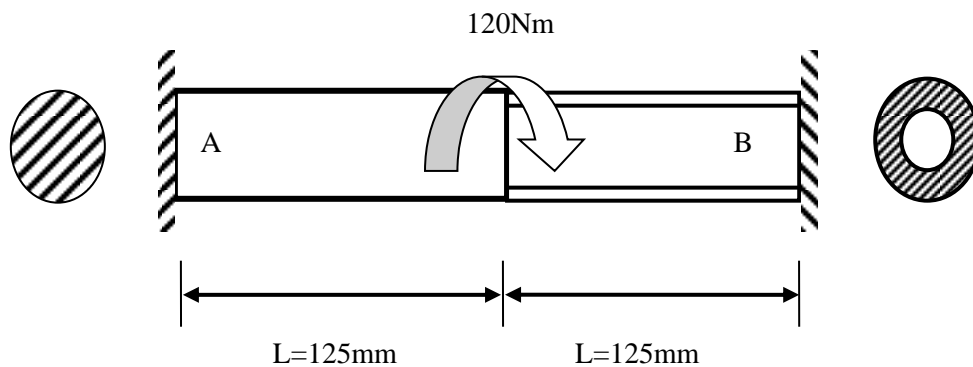
Le diamètre extérieur $D=100\text{mm}$ et de diamètre intérieur $d=80\text{mm}$.



Exercice 04

Le diamètre extérieur vaut 20 mm , le diamètre intérieur 16 mm . La barre AB est encastrée en A et B.

- Calculez les moments d'encastrement en A et B.



CHAPITRE V

FLEXION

Chapitre V:

Flexion

V.1. Généralités

Une poutre droite est sollicitée à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa courbure. La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple.

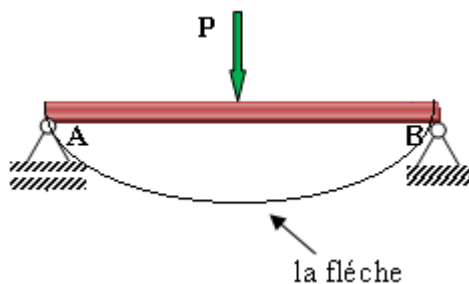


Fig V.1. Courbure d'une poutre sollicitée à la flexion

V.2. Contraintes normales en flexion

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. Dans la zone comprimée en (haut) les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent.

$$dx = R d\theta \quad ; \quad \varepsilon = y/R \tag{V.1}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{V.2}$$

$$\sigma = \frac{E y}{R} \tag{V.3}$$

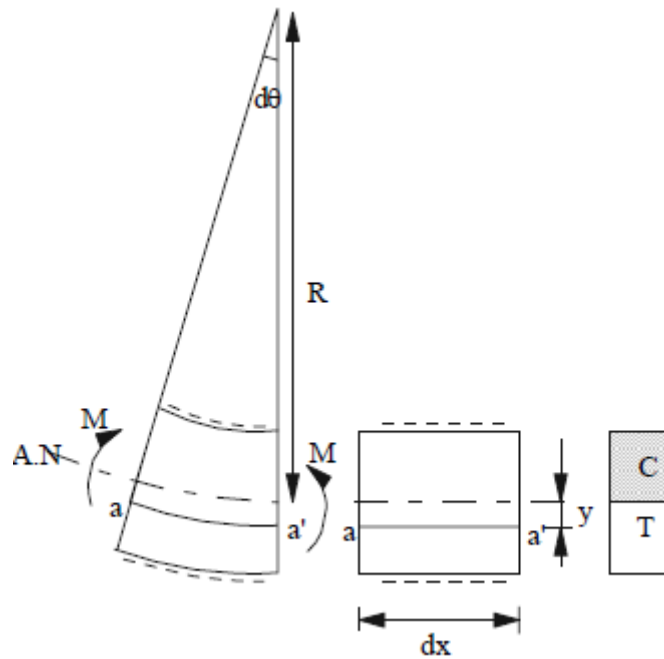


Fig V.2 - Élément de poutre isolé non chargé [9].

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$\iint_s \sigma y ds = M \quad (V.4)$$

En Introduisant la valeur de σ de l'équation (V.3) dans l'expression (V.4) on obtient:

$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds \quad (V.5)$$

$$M = \frac{EI_z}{R} \quad (V.6)$$

En introduisant l'équation (V.3) dans (V.6), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur:

$$\sigma = \frac{M y}{I_z} \quad (V.7)$$

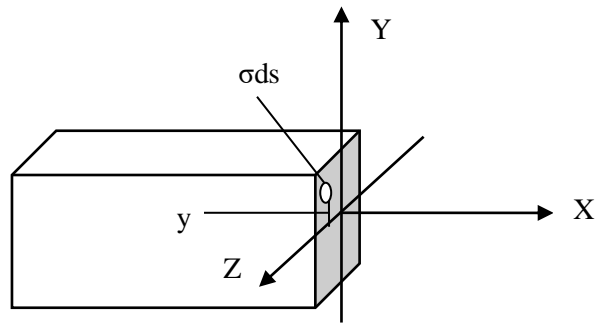


Fig V.3 - Présentation de la contrainte dans une section d'une poutre

V.2.1. Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal

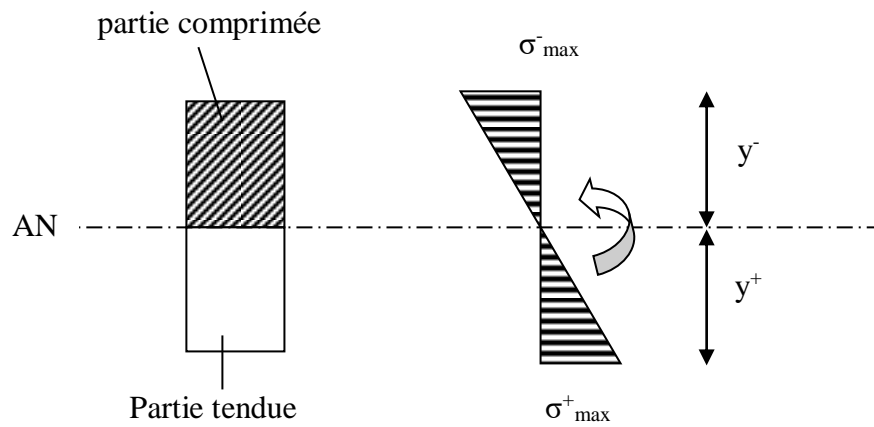


Fig V.4- Présentation de la contrainte dans une section droite d'une poutre ayant un axe de symétrie horizontal

$$y_{\max}^- = y_{\max}^+ \quad (\text{V.8})$$

$$|\sigma_{\max}^-| = |\sigma_{\max}^+| = \sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_x} \quad (\text{V.9})$$

σ_{\max} : la contrainte normale maximale

$$W_y = \frac{I_x}{Y_{\max}} = \frac{I_x}{h/2} \quad (\text{V.10})$$

W_y :Module de résistance

V.2.2. Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal

$$y_{\max}^- \neq y_{\max}^+ \quad (\text{V.11})$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{M y_{\max}^-}{I_x} \quad (\text{V.12})$$

$$|\sigma_{\max}^+| = \frac{M y_{\max}^+}{I_x} \quad (\text{V.13})$$

σ_{\max} : la contrainte normale maximale

$$W_y = \frac{I_x}{Y_{\max}} \quad (\text{V.14})$$

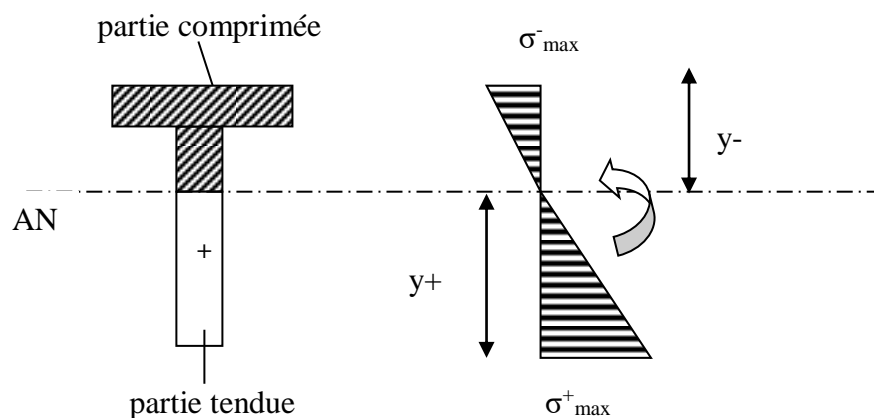


Fig V.5- Présentation de la contrainte dans une section d'une poutre n'ayant pas un axe de symétrie horizontal.

V.3. Contraintes tangentielles en flexion

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire FigV.6 sont associées des

contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles).

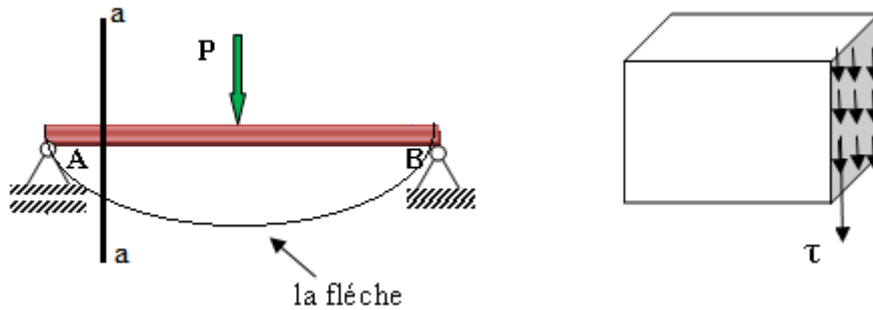


Fig V.6 - Présentation de la contrainte tangentielle dans une section d'une poutre

Soit un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant T et un moment fléchissant variant de M à $M+dM$.

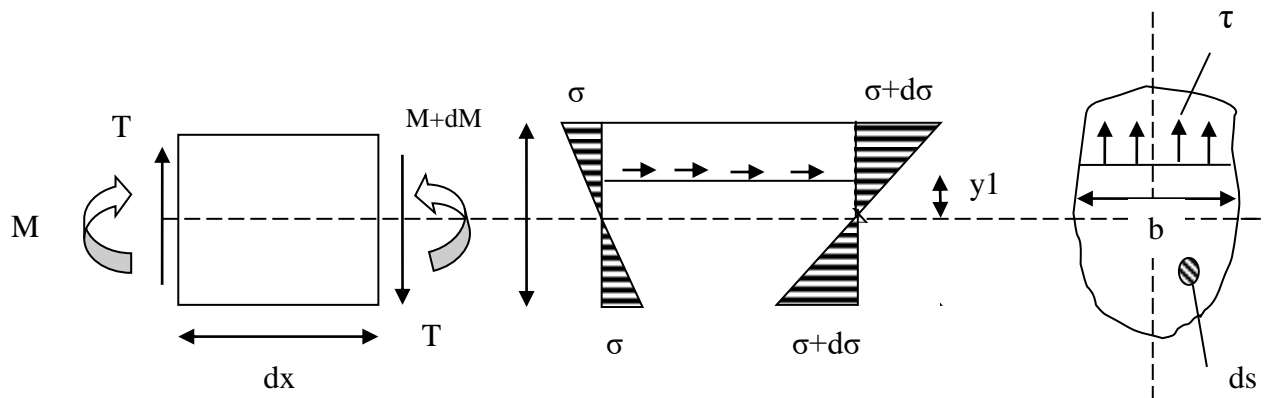


Fig V.7 -Représentation descriptive des sollicitations et de leur diagramme de contrainte

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx , $\sigma+d\sigma$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ .

l'équation d'équilibre:

$$\iint_{S_1} \sigma ds - \iint_{S_1} (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b ds = 0 \quad (\text{V.15})$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section bdx:

$$\tau b dx = \iint_{S_1} d\sigma ds = \iint_{S_1} \frac{dM}{I} y ds \quad (\text{V.16})$$

$$\tau b dx = \frac{dM}{I} \iint_{S_1} y ds \quad (\text{V.17})$$

$$\tau b dx = \frac{dM}{I} S_1^* \quad (\text{V.18})$$

La valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par:

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{bI} = \frac{TS_1^*}{Ib} \quad (\text{V.19})$$

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

S_z^* : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

T : L'effort tranchant

τ : Contrainte tangentielle.

V.4. Calcul de résistance

Pour la flexion pure, la condition de résistance s'écrit:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y \leq [\sigma] \quad (\text{V.20})$$

On devra aussi vérifier:

$$\tau_{\max} = \frac{TS_1^*}{Ib} \leq [\tau] \quad (\text{V.21})$$

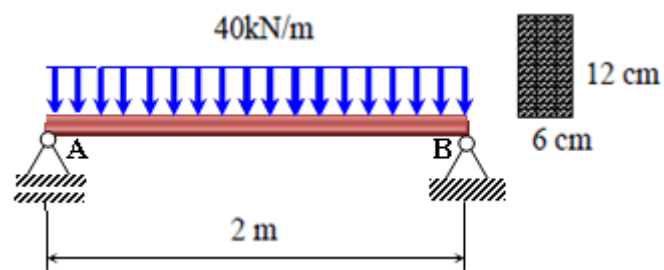
Exercices

Exercice 01

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible $[\sigma]=160$ N/mm².

a- Construire le diagramme des moments

b- Calculer la contrainte maximale

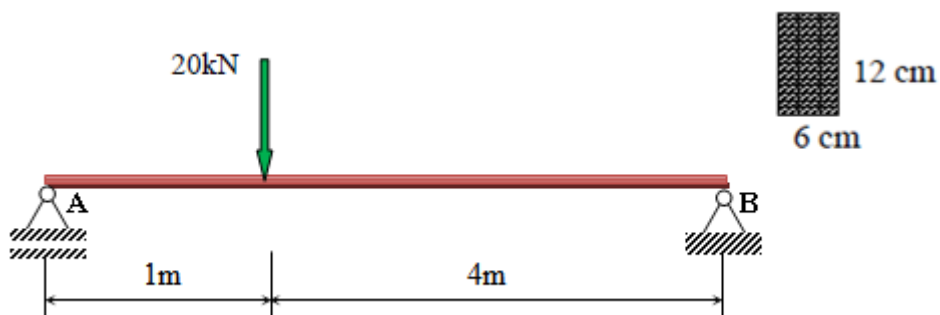


Exercice 02

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible $[\sigma]=120$ N/mm².

a. Construire le diagramme des moments

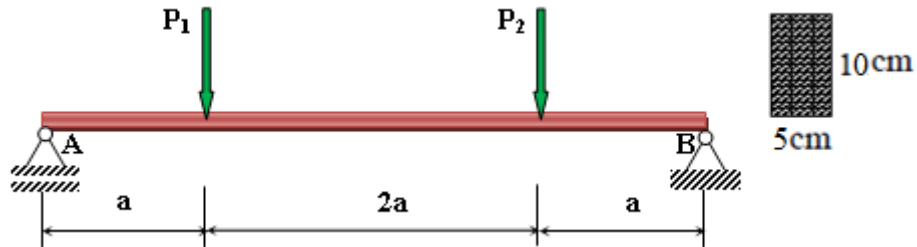
b. Calculer la contrainte maximale



Exercice 03

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible ($P_1=$
 $P_2=20$ kN, $a=1$ m $[\sigma]=100$ N/mm²).

- Construire le diagramme des moments
- Calculer la contrainte maximale

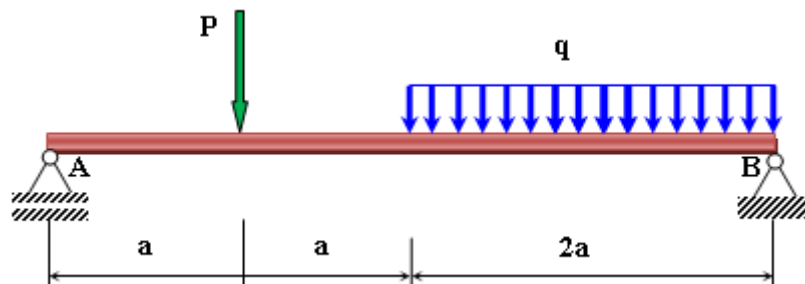


Exercice 04

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible $[\sigma]=110\text{ N/mm}^2$.

- Construire le diagramme des moments

($P=40\text{ kN}$, $q=20\text{ kN/m}$, $a=1\text{ m}$)



CHAPITRE VI

CISAILLEMENT

Chapitre VI:

Cisaillement

VI.1. Généralités :

Un corps est sollicité au cisaillement s'il est soumis à l'action de deux forces transversales égales et de sens opposé qui tendent à le séparer en deux parties en faisant glisser l'une par rapport à l'autre

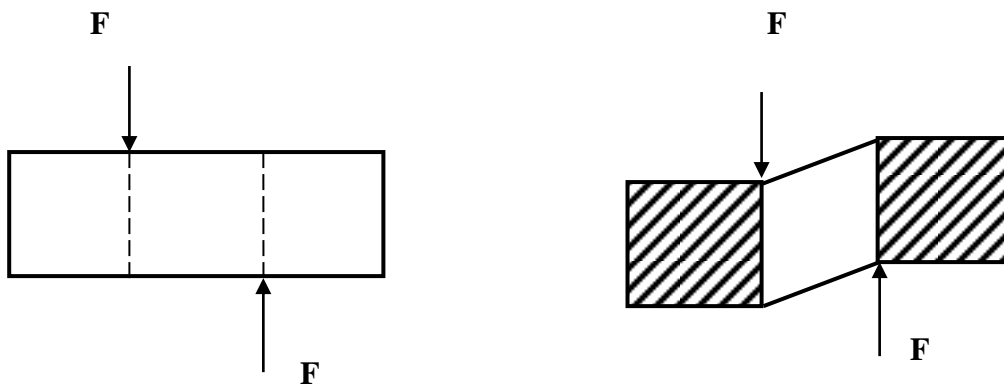


Fig VI .1 - Poutre soumise a deux forces avant et après cisaillement

VI.2. Déformation en cisaillement

Lorsqu' une poutre est soumise au cisaillement, la section subit un déplacement latéral d'une valeur dy . Chaque section de la poutre subit un glissement latéral par rapport a la section voisine, donc la ligne moyenne s'incline d'un angle γ appelé angle de glissement relatif.

$$\text{tg}(\gamma) \approx \gamma \approx \frac{dy}{dx} \quad (\text{VI.1})$$

Hooke a établi la loi linéaire exprimant la contrainte « τ » en fonction de l'angle de cisaillement relatif « γ » par la relation suivante:

$$\tau = G \gamma \quad (\text{VI.2})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (\text{VI.3})$$

G : module de cisaillement

E : module d'élasticité longitudinale

μ : coefficient de poisson

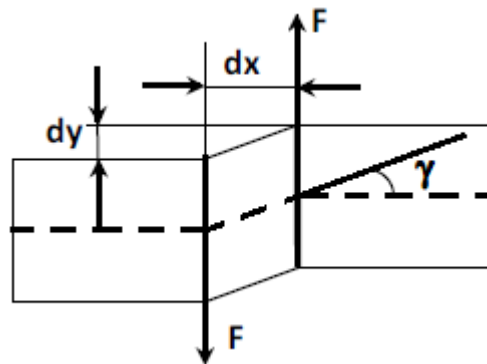


Fig VI.2- schéma descriptive d'une Sections droites sollicitées au cisaillement

VI.2.1. Condition de résistance

La résistance au cisaillement d'un élément de construction est assurée si la contrainte maximale dans la section dangereuse vérifie la condition suivante :

$$\tau = \frac{P}{S} \leq [\tau] \quad (\text{VI.4})$$

S: Section transversale

P: Effort tranchant

On peut citer quelques contraintes tangentielles pour quelques métaux d'une manière générale :

- Pour les aciers $[\tau] = (0.7 \div 0.8) [\sigma]$
- Pour la fonte $[\tau] = (0.8) [\sigma]$
- Pour le bois $[\tau] = (0.1) [\sigma]$

VI.3. Calcul des assemblages

Dans différents assemblages de construction (assemblages boulonnés, rivetés, soudés...etc) les éléments d'assemblage sont soumis dans différents plans à la traction (compression), au cisaillement et au froissement (matage).

VI.3.1. calcul au cisaillement

Quand on calcule au cisaillement les boulons, les contraintes tangentielles se trouvent au niveau de la section soumise au cisaillement au niveau du boulon. La condition de résistance du boulon au cisaillement est :

La condition de résistance au cisaillement du boulon s'écrit:

$$\tau = \frac{P}{S} \leq [\tau] \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi}{4} d^2 \quad (\text{VI.5})$$

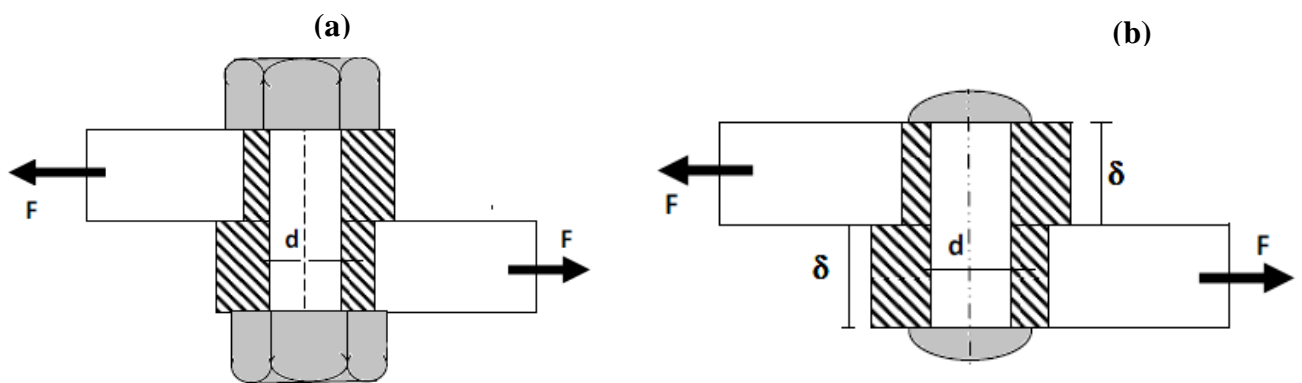


Fig VI.3- schéma descriptive (a) Assemblage par boulon

(b) Assemblage par rivet

VI.3.2. calcul de froissement

En dehors du cisaillement et au niveau du boulon, il existe le froissement des surfaces de contact. On entend par froissement, la déformation plastique qui se produit sur la surface de contact.

Le calcul de froissement se fait approximativement, car la loi de la distribution des contraintes (pression) sur la surface de contact n'est pas connue. Pour simplifier les calculs, on suppose que la pression est uniformément répartie non sur la surface écrasée, mais sur l'aire (S_{fr}) qui est la projection de la surface écrasée sur le plan perpendiculaire à la direction de la force (P).

$$\sigma_{fr} = \frac{P}{\delta d} \leq [\sigma_{fr}] \quad (VI.6)$$

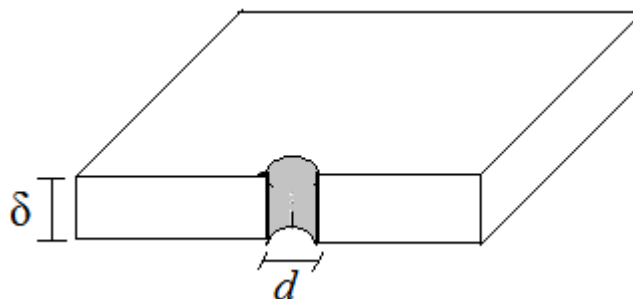


Fig VI.4- schéma descriptive d'une Sections droites sollicitées au froissement

VI.3.3. Vérification de traction compression

Dans le cas d'un seul boulon, la condition de résistance s'écrite:

$$\sigma = \frac{P}{S} \leq [\sigma] \quad (VI.7)$$

$$S = (b - d)\delta \quad (VI.8)$$

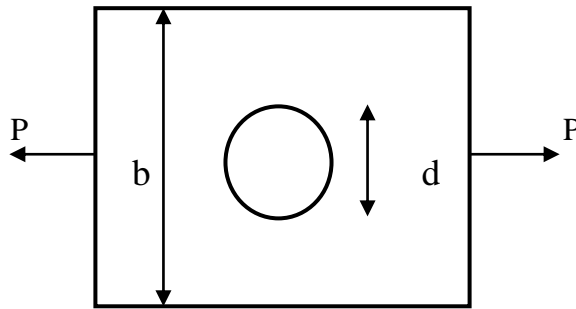


Fig VI.5- schéma descriptive d'une Sections droites sollicitées au traction-compression

VI.4. Assemblage par plusieurs rivets et boulons

VI.4.1. Calcul au cisaillement

$$\tau = \frac{P}{niS} \leq [\tau] \quad (VI.9)$$

n: nombre de rivets

i: nombre de sections cisillées

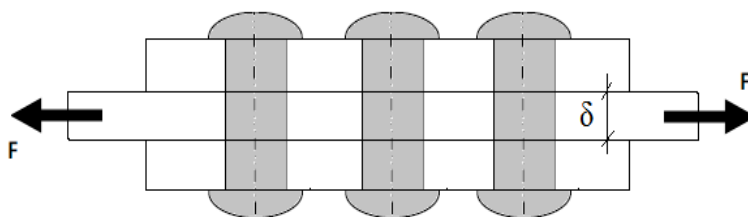


Fig VI.6- Présentation d'une Sections droites sollicitées à la traction Assemblé par plusieurs rivets

VI.4.2-calcul de froissement

$$\sigma_{fr} = \frac{P}{\delta dn} \leq [\sigma_{fr}] \quad (VI.10)$$

VI.4.3. Vérification de traction compression

Etant donné que la présence des rivets et des boulons affaiblissent les tôles à joindre,

dans le cas d'un seul boulon utilisé, la condition de résistance est :

$$\sigma = \frac{P}{S} \leq [\sigma] \quad (\text{VI.11})$$

$$S = (b - n'd)\delta \quad (\text{VI.12})$$

$$\sigma = \frac{P}{\delta(b - dn')} \leq [\sigma] \quad (\text{VI.13})$$

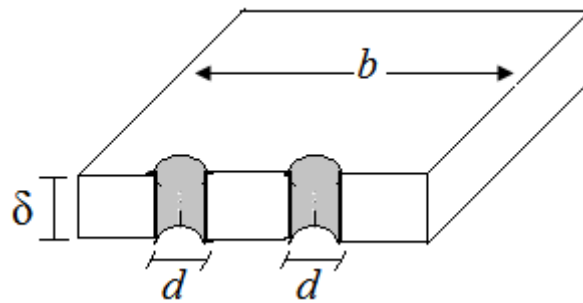
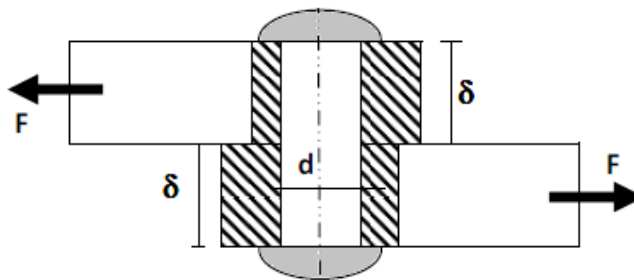


Fig VI.7- Présentation d'une section assemblée par deux rivets sollicitées au froissement

Exercices

Exercice 01

Déterminer le diamètre du boulon et vérifier la résistance à l'écrasement du boulon et à la traction de la tôle, sachant que : b et e la largeur et l'épaisseur des tôles



Données : $\delta = 15 \text{ mm}$ et $b = 10 \text{ cm}$

$P = 60 \text{ kN}$, $[\sigma]_{\text{tr}} = 150 \text{ MPa}$,

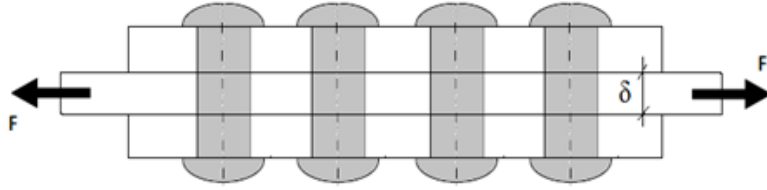
$[\tau] = 100 \text{ MPa}$, $[\sigma]_{\text{fr}} = 300 \text{ MPa}$

Exercice 02

Deux profilés de largeur $b=150\text{mm}$ et d'épaisseur $\delta = 8 \text{ mm}$, sont assemblés par deux tôles de largeur $b=150\text{mm}$ et d'épaisseur 6mm le diamètre des rivets $d=18\text{mm}$.

- calculer P maximale de cette assemblée.

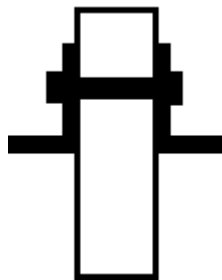
Données : $[\sigma]_{\text{tr}} = 140 \text{ MPa}$, $[\tau] = 120 \text{ MPa}$, $[\sigma]_{\text{fr}} = 250 \text{ MPa}$



Exercice 0 3

Déterminer le nombre de rivets de l'assemblage de deux cornières d'épaisseur $d=12\text{mm}$ sur un gousset le diamètre du boulon $d=14\text{ mm}$.

Données : $[\sigma]_{tr} = 120\text{ MPa}$, $[\tau] = 120\text{ MPa}$, $[\sigma]_{fr} = 220\text{ MPa}$



CHAPITRE VII

FLAMBEMENT

Chapitre VII:

Flambement

VII.1. Généralités

Lorsque une barre est soumise à un effort de compression elle peut se rompre par un phénomène d'instabilité de grande amplitude appelé *flambement*.

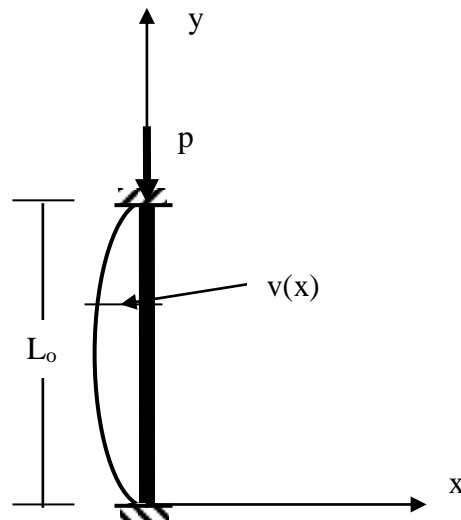


Fig VII.1- une barre soumise à un effort de compression flambé

Le flambage ou flambement est un phénomène d'instabilité d'une structure élastique qui pour échapper à une charge importante exploite un mode de déformation non sollicité mais opposant moins de raideur à la charge. La notion de flambement s'applique généralement à des poutres élancées qui lorsqu'elles sont soumises à un effort normal de compression, ont tendance à fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression (passage d'un état de compression à un état de flexion) ; mais elle peut aussi s'appliquer par exemple à des lames de ressort sollicitées en flexion qui se déversent en torsion pour échapper à la charge.

Le terme flambement est plutôt utilisé en mécanique des structures pour le phénomène et le critère de dimensionnement correspondant et le terme flambage pour un évènement particulier.

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$P \leq [P]_s \text{ avec } [P]_s = P_{cr} / n_s \quad (\text{VII.1})$$

n_s : le coefficient de la marge de stabilité

VII.2. Force Critique

$$E.I \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) \quad M(x) = P.v(x) \quad (\text{VII.2})$$

$$E.I \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + P.v(x) = 0 \quad (\text{VII.3})$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2.v(x) = 0 \quad (\text{VII.4})$$

La solution générale de cette équation est

$$v(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (\text{VII.5})$$

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad v(L) = 0$$

La première condition $B = 0$ et la seconde donne:

$$A \sin kL = 0$$

Si $\sin kL \neq 0$, on doit avoir $A = 0$ et $v = 0$.

Si $\sin kL = 0$ Alors A peut être quelconque

La solution est alors: $kL = n\pi$

$$k^2 L^2 = n^2 \pi^2$$

$$P_{Cr} = \frac{n^2 \pi^2 E I_{\min}}{L^2} \quad (\text{VII.6})$$

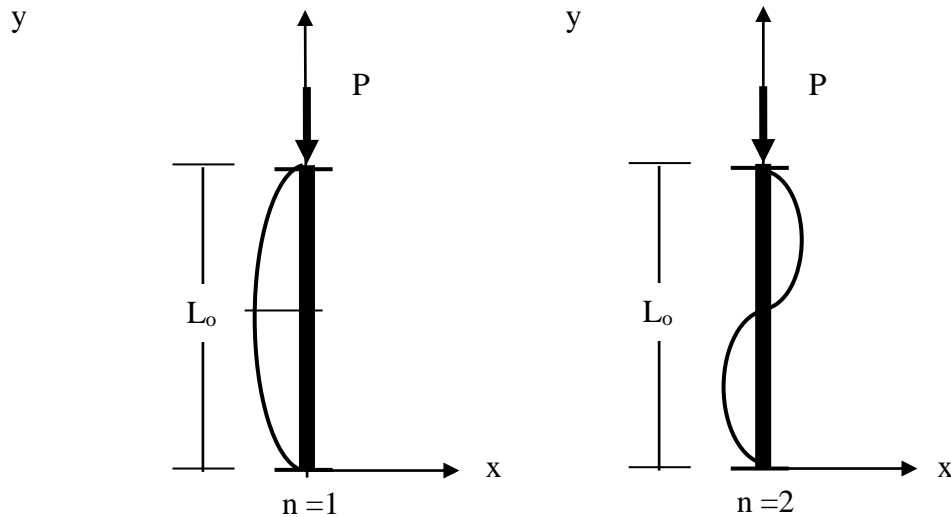


Fig VII.2- Représentation des différents modes de flambement

La charge critique fondamentale correspond à $n=1$

$$P_{Cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L^2} \quad (\text{VII.7})$$

VII.3. Longueur effective: (condition de fixation)

On écrit alors l'équation d'Euler sous la forme:

$$P_{Cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_{\text{eff}}^2} \quad (\text{VII.8})$$

Avec $L_{\text{eff}} = \mu L$, la longueur effective ou longueur libre de flambement

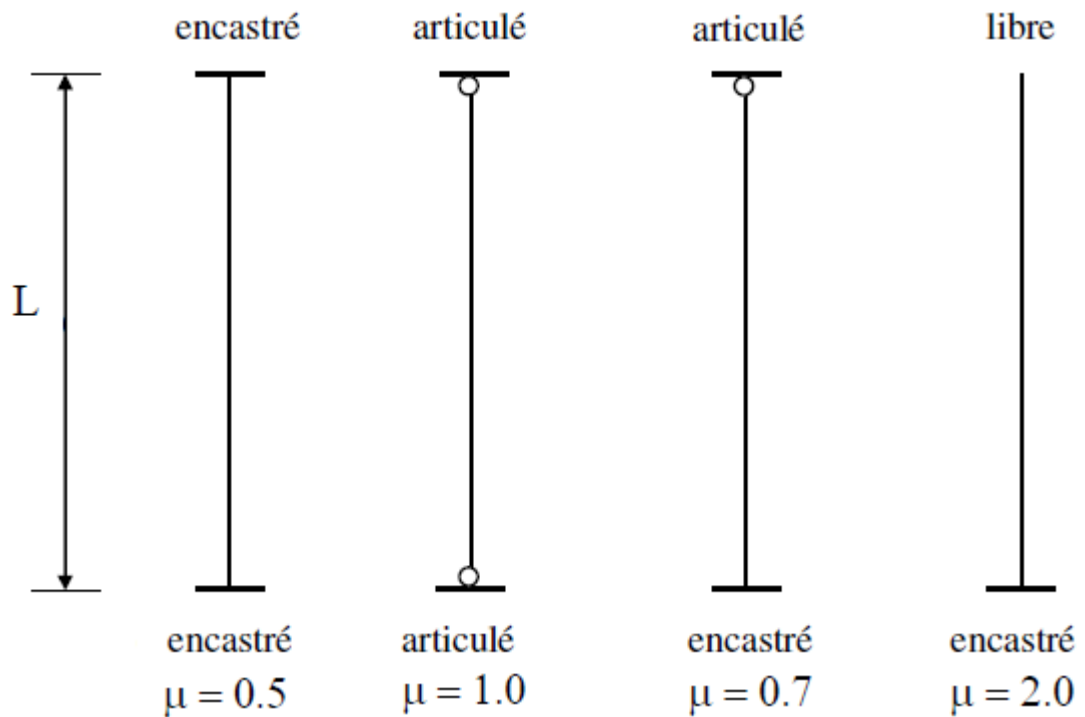


Fig VII.3- Représentation des différentes conditions de fixation.

VII.4. Contrainte critique de flambement

$$P_{Cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_{\text{eff}}^2} \quad (\text{VII.9})$$

$$\sigma_{Cr} = \frac{P_{Cr}}{S} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{S L_{\text{eff}}^2} \quad (\text{VII.10})$$

rayon de giration de la section S

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{S}} \quad (\text{VII.11})$$

$$\sigma_{Cr} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{L_{\text{eff}}^2} \quad (\text{VII.12})$$

En définissant l'élanement λ

$$\lambda = \frac{L_{\text{eff}}}{i} \quad (\text{VII.13})$$

$$\sigma_{\text{Cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{VII.14})$$

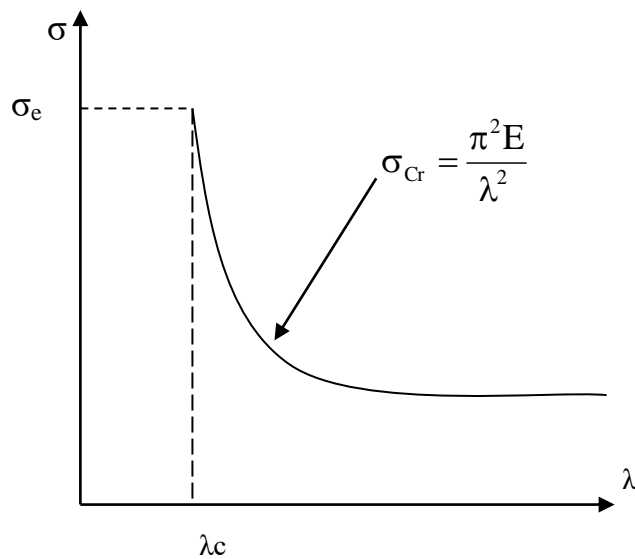


Fig VII.4- Représentation de la contrainte en fonction de l'élanement λ

Le phénomène de flambement est observé aussi au-delà du domaine élastique. Dans ce cas, la valeur de la contrainte critique est calculée d'après les données expérimentales de F. Yassinski. Pour différents matériaux elle est donnée par la formule empirique suivante:

$$\sigma_{\text{cr}} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (\text{VII.15})$$

VII.5. Calcul à la stabilité

La vérification de la stabilité des barres comprimées est ramenée à remplir la condition suivante:

$$\sigma_{cr} \leq [\sigma]_s \quad (\text{VII.16})$$

$[\sigma]_s$: contrainte admissible de stabilité est égale à:

$$[\sigma]_s = \frac{\sigma_{Cr}}{n_s} \quad (\text{VII.17})$$

n_s : le coefficient de stabilité est pris toujours supérieur au coefficient de sécurité:

Acier 1.8 à 3

Fonte 5 à 5.5

Bois 2.8 à 3.2

L'expression de la contrainte admissible de stabilité cette méthode utilise la contrainte admissible de compression $[\sigma^-]$ minorée par un coefficient ϕ dont la valeur est défini à partir :

n : coefficient de sécurité

σ_d : contrainte dangereuse = σ_{ec} matériaux ductiles

$$\frac{[\sigma]_s}{[\sigma]^-} = \left(\frac{\sigma_{Cr}}{n_s} \right) \frac{n}{\sigma_d} \quad (\text{VII.18})$$

$$[\sigma]_s = \left(\frac{\sigma_{Cr}}{n_s} \right) \frac{n}{\sigma_d} [\sigma]^- \quad (\text{VII.19})$$

$$[\sigma]_s = \phi \cdot [\sigma]^- \quad (\text{VII.20})$$

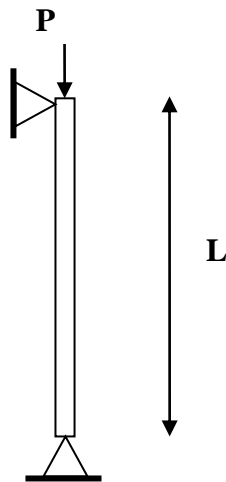
avec

$$\phi = \left(\frac{\sigma_{Cr}}{n_s} \right) \frac{n}{\sigma_d}$$

Exercices

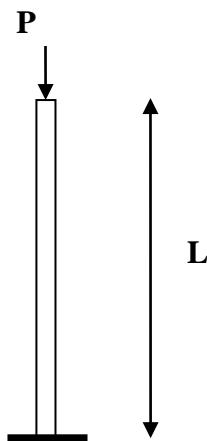
Exercice 01

Déterminer la charge admissible P et le coefficient de stabilité n_{st} de la barre comprimée sachant que : $L = 1.0$ m, $d = 5$ cm, $[\sigma] = 10$ N/mm², $\lambda_{lim} = 70$ $E = 1.2 \cdot 10^4$ N/mm².



Exercice 02

Dimensionner, d'après le critère de stabilité, la barre comprimée ci-contre sachant que $n_{st} = 2$, $E = 3 \cdot 10^5$ N/mm² et $\sigma_{pr} = 300$ N/mm², $P = 200$ kN, $L = 1$ m

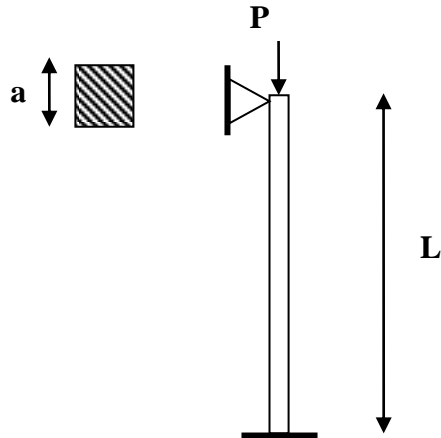


Exercice 03

Dimensionner, d'après le critère de stabilité, la barre comprimée ci-contre, sachant

que :

$E = 10^5 \text{ N/mm}^2$, $P = 200 \text{ kN}$, $[\sigma] = 90 \text{ N/mm}^2$ $L = 3.0 \text{ m}$.



Références Bibliographiques

- [1] Alexandru D.C. Quelques chapitres de la résistance des matériaux. Ed. OPU, Alger, 267p.
- [2] Anisimov A. Calcul des barres dans le cas de sollicitation composée (Partie 1 de RDM II). Ed.OPU, Alger, 1993, 111p.
- [3] Case J., Chilver L., Ross C.T.F. Strength of Materials and Structures. Ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, 699p.
- [4] Del Pedro M., Gmür T., Botsis J. Introduction à la mécanique des solides et structures. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004 - 313p.
- [5] Nouredine bourahla.resistance des materiaux de base.
- [6] Nofel M., Warda M, et Latouf M., resistance des materiaux Tome 1,2, O.P.U 04-91.
- [7] Alexandru D.C. Quelques chapitres de la résistance des matériaux. Ed. OPU, Alger, 267p.
- [8] Zamila HARICHANE.,Résistance des Matériaux (RDM-II). Université Hassiba Ben Bouali de Chlef . Mars 2013.
- [9] Jean-Claude Doubrère, Résistance des Matériaux 11e édition.