REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'Enseignement Supérieur et De la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ORAN1 AHMED BEN BELLA
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
Département de mathématiques

POLYCOPE

Présenté par

KEBLI SALIMA

COURS D'ALGÈBRE 2 ET EXERCICES CORRIGÉS

1ère Année Mathématiques et Informatique

Année universitaire : 2025/2026

INTRODUCTION

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année universitaire (Mathématiques et Informatiques). Il est conforme au programme figurant dans le canevas ministériel de la classe précitée.

Contenu du polycopié :

Le document est composé de quatre chapitres couvrant les notions fondamentales de l'algèbre linéaire :

— **Chapitre 1 : Espaces vectoriels** — Introduction à la structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, bases, dimension et somme directe.

— **Chapitre 2 : Applications linéaires** — Définition et propriétés des applications linéaires, noyau et image, théorème du rang, isomorphismes.

— **Chapitre 3 : Matrices** — Calcul matriciel, matrices carrées, déterminant, matrice associée à une application linéaire, changement de bases et matrice de passage.

— **Chapitre 4 : Résolution de systèmes linéaires** — Écriture matricielle et vectorielle des systèmes, méthode du pivot de Gauss, systèmes de Cramer, théorème de Rouché-Fontené.

Structure pédagogique :

Chaque chapitre est organisé de la manière suivante :

— Un **cours complet** présentant les définitions, théorèmes et propriétés essentielles.

— Des **exemples d'application directe** illustrant immédiatement les notions introduites.

— Une série d'**exercices résolus** permettant l'assimilation et l'acquisition des notions traitées.

Conseils aux étudiants :

Afin de tirer le meilleur parti de ce polycopié, il est recommandé de :

1. Lire attentivement le cours et bien comprendre chaque définition avant de passer aux exemples.

2. Chercher par soi-même les solutions des exercices proposés **sans consulter immédiatement les corrigés**.
3. Refaire les démonstrations des théorèmes (non incluses dans ce cours) en s'appuyant sur les références bibliographiques.
4. Utiliser les exercices corrigés pour vérifier sa compréhension et identifier ses éventuelles difficultés.

Prérequis :
Ce cours suppose connues les notions de base sur les ensembles, les applications, les nombres réels et complexes, ainsi que les opérations élémentaires sur les polynômes.

L'auteur tient à remercier toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce support. Toute remarque ou suggestion visant à améliorer ce polycopié sera la bienvenue.

L'auteur

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS

Dans ce polycopié, les notations suivantes sont adoptées :

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers relatifs $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	L'ensemble des nombres rationnels $\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$
$:=$	Par définition
$\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$	Implications dans le sens direct et inverse respectivement
$\Longleftrightarrow$	Équivalence logique
$\wedge$, $\vee$	Conjonction et disjonction respectivement
$\mathcal{F}(E, F)$	L'ensemble des applications de E dans F
$\mathrm{Card}(E)$	Nombre d'éléments de l'ensemble E (quand E est fini)
A^c	Complémentaire de A dans E
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de E
$A \triangle B$	Différence symétrique
$A \setminus B$	A privé de B
$A \times B$	Produit cartésien
$f(A)$	Image directe de A par f
$f^{-1}(B)$	Image réciproque de B par f
$A[X]$	Anneau des polynômes à coefficients dans A
$\deg f$	Degré du polynôme f
$\mathrm{pgcd}(n, m)$	Plus grand diviseur commun de n et m
$\mathrm{ppcm}(n, m)$	Plus petit commun multiple
$E/\mathcal{R}$	Ensemble quotient
$\mathrm{Im}(f)$	Image de l'application f
$\ker(f)$	Noyau de l'application f
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\dim(E)$	Dimension de l'espace E
$\mathrm{rg}(\mathcal{F})$	Rang de la famille $\mathcal{F}$
$\det(A)$	Déterminant de la matrice A
A^T	Matrice transposée de A
$\mathrm{com}(A)$	Comatrice de A
$\mathrm{tr}(A)$	Trace d'une matrice A
$A \oplus B$	Somme directe de A et B

CHAPITRE 1

ESPACE VECTORIEL

La notion d'espace vectoriel est fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel pour l'agrandir ou le rétrécir. Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,...Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...

1.1 Structure d'espace vectoriel

Étant donné un corps $\mathbb{K}$ (en pratique dans ce cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère un ensemble E muni de deux lois de composition :

— une loi interne $+ : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto x + y$;

— une loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$.

Définition 1.1. *On dit que E est un* ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ *(ou que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) lorsque :*

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif (on note 0_E son élément neutre) ;*
2. *la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :*
   (a) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$
   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in E : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$
   (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x \in E : \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$
   (d) $\forall x \in E : 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* ***scalaires****.*

Exemple 1.1. ***Les vecteurs du plan.*** *Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x',\ y + y'), \qquad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x,\ \lambda y).$$

L'élément neutre est $(0,0)$ *et le symétrique de* (x,y) *est* $(-x,-y)$*. Alors* $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.2. ***Les fonctions réelles.*** *Soit* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. Pour* $f,g\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$*, on définit :*

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (\lambda\cdot f)(x)=\lambda f(x).$$

L'élément neutre est la fonction nulle $x\mapsto 0$*. Alors* $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exemple 1.3. ***Les polynômes.*** *Soit* $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels. L'addition usuelle des polynômes et la multiplication par un réel en font un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Le polynôme nul est l'élément neutre.*

Remarque 1.1. *Il est important de noter que l'ensemble* $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ *muni des mêmes lois n'est* ***pas*** *un espace vectoriel car, par exemple,* $0\cdot(1,1)=(0,0)\notin\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ *: la loi externe n'est pas bien définie.*

1.1.1 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Proposition 1.1. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On a :*

1. $\forall x\in E,\ 0_{\mathbb{K}}\cdot x=0_E$;
2. $\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \alpha\cdot 0_E=0_E$;
3. $\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (-\alpha)\cdot x=-(\alpha\cdot x)=\alpha\cdot(-x)$;
4. $\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ \big(\alpha\cdot x=0_E \iff (\alpha=0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x=0_E)\big)$.

1.1.2 Combinaison linéaire

Définition 1.2. *Soient* $n\geq 1$ *un entier et* $v_1,\ldots,v_n$ *des vecteurs d'un espace vectoriel* E*. Tout vecteur de la forme*

$$u=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n,$$

où $\lambda_i\in\mathbb{K}$*, est appelé* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs* $v_1,\ldots,v_n$*. Les scalaires* λ_i *sont les* ***coefficients*** *de la combinaison linéaire.*

Exemples 1.1.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$*,* $(3,3,1)$ *est combinaison linéaire de* $(1,1,0)$ *et* $(1,1,1)$ *car*

$$(3,3,1)=2(1,1,0)+(1,1,1).$$

2. *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, soient* f_0,f_1,f_2,f_3 *définies par* $f_0(x)=1$*,* $f_1(x)=x$*,* $f_2(x)=x^2$*,* $f_3(x)=x^3$*. Alors* $f(x)=x^3-4x^2+5x-3$ *s'écrit*

$$f=f_3-4f_2+5f_1-3f_0.$$

3. *Dans $\mathbb{R}^3$, montrons que* $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ *est combinaison linéaire de* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. *On cherche λ, μ tels que $w = \lambda u + \mu v$. On obtient le système*

$$\begin{cases} \lambda + 6\mu = 9 \\ 2\lambda + 4\mu = 2 \\ -\lambda + 2\mu = 7 \end{cases}$$

La solution est $\lambda = -3$, $\mu = 2$. Donc $w = -3u + 2v$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition

Définition 1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un* ***sous-espace vectoriel*** *de E si :*

1. $0_E \in F$;
2. $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$ *(stabilité par addition) ;*
3. $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$ *(stabilité par multiplication scalaire).*

Autrement dit, F est non vide et stable par combinaison linéaire.

Exemples 1.2.
1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-3z-2 = 0\}$ ***n'est pas*** *un sous-espace vectoriel car* $(0, 0, 0) \notin F$.
3. *L'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.*

Théorème 1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

1.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

1.3.1 Intersection

Proposition 1.2. *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Plus généralement, l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exemples 1.3.
1. *Dans $\mathbb{R}^3$, posons :*

$$F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad F_2 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}, \quad F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Alors $F_1 \cap F_2 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$, $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{(0, 0, 0)\}$.

2. *L'intersection de l'ensemble des fonctions paires et impaires dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est réduite à la fonction nulle.*

Note 1.1. *L'union de sous-espaces vectoriels n'est généralement pas un sous-espace vectoriel. Par exemple, dans* $\mathbb{R}^2$*,* $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ *et* $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ *sont des sous-espaces, mais* $F_1 \cup F_2$ *ne l'est pas car* $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$*.*

1.3.2 Sous-espace engendré

Définition 1.4. *Soit* $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ *une famille de vecteurs de* E*. Le* ***sous-espace vectoriel engendré*** *par* $\mathcal{F}$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de* $\mathcal{F}$*, noté* $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$ *:*

$$\operatorname{vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Proposition 1.3. $\operatorname{vect}(\mathcal{F})$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* $\mathcal{F}$ *(au sens de l'inclusion).*

Exemples 1.4.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$*,* $\operatorname{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$*.*
2. *Le plan* $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ *est engendré par* $(1, 0, -1)$ *et* $(0, 1, -1)$*.*

1.3.3 Somme de sous-espaces

Définition 1.5. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On appelle* **somme** *de* F *et* G *l'ensemble*

$$F + G = \{u + v \mid u \in F,\ v \in G\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E*. Plus généralement, si* $F_1, \ldots, F_n$ *sont des sous-espaces, leur somme* $F_1 + \cdots + F_n$ *est définie de manière analogue.*

Définition 1.6. *Une somme* $F = F_1 + \cdots + F_n$ *est dite* ***directe*** *lorsque tout vecteur* $u \in F$ *s'écrit* ***de manière unique*** *sous la forme* $u = u_1 + \cdots + u_n$ *avec* $u_i \in F_i$*. On note alors* $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$*.*

Proposition 1.4. *La somme* $F_1 + \cdots + F_n$ *est directe si et seulement si la seule façon d'écrire* 0_E *comme somme* $u_1 + \cdots + u_n$ *(avec* $u_i \in F_i$*) est* $u_1 = \cdots = u_n = 0_E$*.*

Définition 1.7. *On dit que* E *est* ***somme directe*** *de deux sous-espaces* F *et* G*, ou que* F *et* G *sont* ***supplémentaires****, lorsque*

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

On note $E = F \oplus G$*.*

Exemple 1.4. *Dans* $\mathbb{R}^2$*,* $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ *et* $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ *sont supplémentaires :* $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$*.*

1.4 Familles libres, génératrices, bases et dimension

1.4.1 Familles libres et liées

Définition 1.8. *Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

- *$\mathcal{F}$ est **liée** (ou les vecteurs sont **linéairement dépendants**) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$.*
- *$\mathcal{F}$ est **libre** (ou les vecteurs sont **linéairement indépendants**) si la seule combinaison linéaire nulle est celle avec tous les coefficients nuls :*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemples 1.5. *1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\big((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\big)$ est liée car $(1,2,3) - 2(4,5,6) + (7,8,9) = (0,0,0)$.*

2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\big((1,-2,1),(1,0,-1),(1,0,1)\big)$ est libre.

Propriétés 1.1. *1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

2. Toute famille contenant une famille liée est liée.

3. Toute famille contenant le vecteur nul 0_E est liée.

4. Dans une famille liée, il existe au moins un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

1.4.2 Familles génératrices

Définition 1.9. *Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est **génératrice** de E si $E = \operatorname{vect}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Exemple 1.5. *Dans le plan $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \mid x+y+2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, la famille $\big((-1,1,0),(-2,0,1)\big)$ est génératrice.*

1.4.3 Bases

Définition 1.10. *Une famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E lorsque tout vecteur $u \in E$ s'écrit de **manière unique** comme combinaison linéaire des u_i :*

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Proposition 1.5. *Une famille $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Exemple 1.6. *Dans $\mathbb{K}^n$, la **base canonique** est $(e_1, \dots, e_n)$ où e_i a un 1 en i-ième position et des 0 ailleurs. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$:*

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1).$$

1.4.4 Dimension

Définition 1.11. *Un espace vectoriel E est dit de* ***dimension finie*** *s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est de* ***dimension infinie****.*

Exemples 1.6.
1. *$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont de dimension finie.*
2. *L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie (car les polynômes $1, X, X^2, \ldots$ sont linéairement indépendants et en nombre infini).*

Définition 1.12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la* ***dimension*** *de E et se note* $\dim(E)$.

Théorème 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.*
1. *Toute famille libre de E possède au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.*
3. *Toute famille libre de E à n éléments est une base de E.*
4. *Toute famille génératrice de E à n éléments est une base de E.*

Théorème 1.3 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{S} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de p vecteurs ($p \leq n$). Alors $\mathcal{S}$ peut être complétée par $(n-p)$ vecteurs (choisis dans une base donnée de E) pour former une base de E.*

Exemple 1.7. *Dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (3, 2, -4)$ et $u_2 = (2, 1, -2)$ sont libres. On peut les compléter en une base en ajoutant $e_2 = (0, 1, 0)$ car $e_2 \notin \mathrm{vect}(u_1, u_2)$.*

1.4.5 Formule de Grassmann et somme directe

Théorème 1.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *$E = F \oplus G$,*
2. *$E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$,*
3. *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.*

Exemple 1.8. *Reprenons $F_1 = \{(x, y, z) \mid 3x+2y+z = 0\}$ (dimension 2) et $F_2 = \mathrm{vect}((1, -3, 2))$ (dimension 1) dans $\mathbb{R}^3$. On vérifie que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Par la formule de Grassmann, $\dim(F_1 + F_2) = 2 + 1 - 0 = 3$, donc $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.*

1.4.6 Rang d'une famille

Définition 1.13. *Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Le **rang** de $\mathcal{F}$, noté $rg(\mathcal{F})$, est la dimension du sous-espace engendré par $\mathcal{F}$:*

$$rg(\mathcal{F}) = \dim\Big(\operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_p)\Big).$$

Exemple 1.9. *Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,-1)$, $w = (4,5,1)$. On a $w = u + 2v$, donc $\operatorname{vect}(u,v,w) = \operatorname{vect}(u,v)$ et comme (u,v) est libre, $rg(\{u,v,w\}) = 2$.*

Propriété 1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $rg(\mathcal{F}) = n$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.*

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1.1. *Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.*

1. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?*

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}, \quad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\},$$

$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\}.$$

2. *Pour ceux qui sont des sous-espaces, donner une base et leur dimension.*

Solution 1.1. *1.* — *F_1 **:** F_1 est un sous-espace vectoriel. En effet :*

- $(0,0,0) \in F_1$ *car* $0 + 0 - 0 = 0$.
- *Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in F_1$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 - z_1) + \mu(x_2 + y_2 - z_2) = 0.$$

Donc $\lambda u + \mu v \in F_1$.

— *F_2 **:** F_2 **n'est pas** un sous-espace vectoriel car le vecteur nul $(0,0,0)$ n'appartient pas à F_2 ($0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$).*

— *F_3 **:** F_3 est un sous-espace vectoriel. En effet :*

- $(0,0,0) \in F_3$ *car* $0 = 0 = 2 \times 0$.
- *Soient $u = (x,y,z) \in F_3$ et $v = (x', y', z') \in F_3$, alors $x = y = 2z$ et $x' = y' = 2z'$. On a :*

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z').$$

Vérifions : $\lambda x + \mu x' = \lambda(2z) + \mu(2z') = 2(\lambda z + \mu z')$ et de même pour y. Donc $\lambda u + \mu v \in F_3$.

2. — ***Pour** F_1 **:** L'équation $x + y - z = 0$ donne $z = x + y$. Ainsi :*

$$(x,y,z) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (0,1,1)$ forment une famille génératrice de F_1. Ils sont linéairement indépendants car si $\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,0,0)$, on obtient $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Donc (v_1, v_2) est une base de F_1 et $\dim(F_1) = 2$.

— ***Pour*** F_3 ***:*** *La condition* $x = y = 2z$ *donne* $x = 2z$ *et* $y = 2z$*. Ainsi :*

$$(x, y, z) = (2z, 2z, z) = z(2, 2, 1).$$

Le vecteur $w = (2, 2, 1)$ *est non nul et engendre* F_3*. Donc* (w) *est une base de* F_3 *et* $\dim(F_3) = 1$*.*

Exercice 1.2. *Dans* $\mathbb{R}^4$*, on considère les vecteurs :*

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), \quad v_2 = (2, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 1, 1, 1), \quad v_4 = (1, 0, -1, 1).$$

1. *La famille* (v_1, v_2, v_3, v_4) *est-elle libre ?*
2. *Déterminer le rang de cette famille et en extraire une base du sous-espace* $F = \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$*.*
3. *Compléter cette base en une base de* $\mathbb{R}^4$ *(théorème de la base incomplète).*

Solution 1.2.

1. *Cherchons les scalaires* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Cela donne le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Résolvons par la méthode du pivot (ou par combinaisons). Des équations (3) et (4) :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & (3) \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & (4) \end{cases}$$

De (1) : $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0$*. En utilisant (3) :* $\lambda_2 = \lambda_4 - \lambda_3$*. En reportant dans (1) et (2), on trouve après calculs que la seule solution est* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$*. Donc la famille* (v_1, v_2, v_3, v_4) *est* ***libre****.*

2. *Puisque la famille est libre et contient 4 vecteurs dans* $\mathbb{R}^4$ *(dimension 4), elle forme une base de* $\mathbb{R}^4$*. Ainsi :*

$$\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 4, \quad F = \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4.$$

Une base de F *est donc* (v_1, v_2, v_3, v_4) *elle-même.*

3. *La famille* (v_1, v_2, v_3, v_4) *est déjà une base de* $\mathbb{R}^4$*, elle n'a pas besoin d'être complétée.*

Remarque : Si on avait souhaité illustrer le théorème de la base incomplète, on aurait pu prendre par exemple la sous-famille libre (v_1, v_2) *et la compléter avec* $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ *et* $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ *après avoir vérifié qu'ils n'appartiennent pas à* $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$*.*

Exercice 1.3. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - t = 0\},$$

$$G = \operatorname{vect}\Big(u_1 = (1, 0, 0, 1),\ u_2 = (0, 1, 0, 1)\Big).$$

1. *Déterminer une base et la dimension de F.*
2. *Déterminer une base et la dimension de G.*
3. *Déterminer une base de $F + G$ et de $F \cap G$. Vérifier la formule de Grassmann :*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

4. *A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$? Justifier.*

Solution 1.3. 1. *Les équations de F sont :*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = x \end{cases}$$

On exprime z et t en fonction de x et y : $z = -x - y$, $t = x$. Ainsi un vecteur de F s'écrit :

$$(x, y, z, t) = (x, y, -x - y, x) = x(1, 0, -1, 1) + y(0, 1, -1, 0).$$

Posons $f_1 = (1, 0, -1, 1)$ et $f_2 = (0, 1, -1, 0)$. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (ils ne sont pas colinéaires). Donc (f_1, f_2) est une base de F et $\dim(F) = 2$.

2. *$G = \operatorname{vect}(u_1, u_2)$. Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ sont clairement indépendants (l'un n'est pas multiple de l'autre). Donc (u_1, u_2) est une base de G et $\dim(G) = 2$.*

3. ***Base de $F \cap G$:*** *Un vecteur de $F \cap G$ doit appartenir à F et à G. Il s'écrit donc :*

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = \lambda u_1 + \mu u_2.$$

$$(\alpha, \beta, -\alpha - \beta, \alpha) = (\lambda, \mu, 0, \lambda + \mu).$$

Par identification des coordonnées :

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \mu \\ -\alpha - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = \lambda + \mu \end{cases}$$

De $\alpha = \lambda$ et $\beta = \mu$, la dernière équation donne $\alpha = \alpha + \beta$, soit $\beta = 0$. Alors $\alpha + \beta = 0$ donne $\alpha = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$, ce qui donne le vecteur nul. Ainsi $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et $\dim(F \cap G) = 0$.

Base de $F + G$: *Puisque $F \cap G = \{0\}$, la somme $F + G$ est directe. Une base de $F + G$ est donc la concaténation des bases de F et G :*

$$(f_1, f_2, u_1, u_2) = \Big((1, 0, -1, 1),\ (0, 1, -1, 0),\ (1, 0, 0, 1),\ (0, 1, 0, 1)\Big).$$

Vérifions que ces 4 vecteurs sont indépendants (leur déterminant dans $\mathbb{R}^4$ *est non nul). Ils forment donc une base de* $\mathbb{R}^4$ *et* $F + G = \mathbb{R}^4$*.*

Vérification de la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = 4, \quad \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

La formule est bien vérifiée.

4. *Puisque* $F + G = \mathbb{R}^4$ *et* $F \cap G = \{0\}$*, on a bien* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ *(somme directe).*

CHAPITRE 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\forall u, v \in E, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$ *(additivité) ;*
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in E, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$ *(homogénéité).*

Remarque 2.1. *Les deux conditions de la Définition 2.1 peuvent être regroupées en une seule :*

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Une application linéaire est aussi appelée **morphisme** d'espaces vectoriels.

Exemples 2.1.

1. ***Homothétie.*** *Soit $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = 3x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = f(x) + f(y), \quad f(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha(3x) = \alpha f(x).$$

Donc f est linéaire. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ est linéaire sur $\mathbb{K}$.

2. ***Application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.*** *Soit $f(x,y) = (x+y,\ 2x-y,\ y)$. Vérifions la linéarité. Pour $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$:*

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\ &= \big((x_1+x_2) + (y_1+y_2),\ 2(x_1+x_2) - (y_1+y_2),\ y_1 + y_2\big) \\ &= (x_1 + y_1,\ 2x_1 - y_1,\ y_1) + (x_2 + y_2,\ 2x_2 - y_2,\ y_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Et pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1,\ 2\lambda x_1 - \lambda y_1,\ \lambda y_1) = \lambda f(u).$$

3. ***Dérivation.*** *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$ *l'espace des polynômes à coefficients réels. L'application* $f(P) = P'$ *(dérivée) est linéaire car* $(P+Q)' = P' + Q'$ *et* $(\lambda P)' = \lambda P'$.
4. ***Application nulle.*** *L'application* $f : E \to F$ *définie par* $f(u) = 0_F$ *pour tout* $u \in E$ *est linéaire. On la note souvent* $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.
5. ***Application identité.*** *L'application* $\mathrm{id}_E : E \to E$ *définie par* $\mathrm{id}_E(u) = u$ *est linéaire.*

Exemple 2.1 (Contre-exemple)**.** *L'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (x - y,\ 1 + x)$ *n'est **pas** linéaire car* $f(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$. *Une application linéaire doit toujours envoyer le vecteur nul sur le vecteur nul.*

2.1.1 Vocabulaire

— L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

— Lorsque $E = F$, une application linéaire est appelée **endomorphisme** de E. On note $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

— Une application linéaire **bijective** est appelée **isomorphisme**.

— Un endomorphisme **bijectif** est appelé **automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$ (groupe linéaire de E).

— Lorsque $F = \mathbb{K}$ (le corps des scalaires), une application linéaire est appelée **forme linéaire**.

Exemples 2.2.
1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[X]$ *définie par* $f(a, b) = aX + b$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}_1[X]$ *(l'espace des polynômes de degré* ≤ 1*).*
2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ *définie par* $f(P) = P'$ *est un endomorphisme, mais n'est pas un automorphisme car il n'est pas surjectif (les constantes non nulles n'ont pas d'antécédent).*

2.2 Propriétés élémentaires

Proposition 2.1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors :*
1. $f(0_E) = 0_F$ *;*
2. $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \quad f(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$.

Remarque 2.2. *La première propriété est très utile pour détecter qu'une application n'est **pas** linéaire : si* $f(0_E) \neq 0_F$, *alors* f *n'est certainement pas linéaire.*

2.3 Image et noyau d'une application linéaire

2.3.1 Définitions

Définition 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

— *L'**image** de* f *est l'ensemble :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\} \subseteq F.$$

— *Le **noyau** de f est l'ensemble :*

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} \subseteq E.$$

Proposition 2.2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

1. $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*
2. $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Exemple 2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (-2x,\ y + 3z)$. Déterminons son noyau :*

$$(x, y, z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, -3z, z) = z(0, -3, 1).$$

Donc $\ker(f) = \mathrm{vect}\{(0, -3, 1)\}$ *et* $\dim \ker(f) = 1$.

2.3.2 Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Théorème 2.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

1. *f est **injective** si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. *f est **surjective** si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.
3. *f est **bijective** si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$ *et* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Remarque 2.3. *Pour montrer qu'une application linéaire est injective, il suffit donc de vérifier que $f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$. C'est souvent plus simple que de vérifier directement $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.*

Exemple 2.3. *Considérons $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$ définie par $f(P) = X \cdot P(X)$. Si $f(P) = 0$, alors $XP(X)$ est le polynôme nul, donc P est nul. Ainsi* $\ker(f) = \{0\}$*, donc f est injective. En revanche, f n'est pas surjective car un polynôme non nul de degré* 0 *(une constante non nulle) n'a pas d'antécédent.*

2.4 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème 2.2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est entièrement déterminée par la donnée des n vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$.*

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur un espace de dimension finie, il suffit de préciser l'image des vecteurs d'une base.

Exemple 2.4. *Soit E un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3). Définissons $f \in \mathcal{L}(E)$ par :*

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 - 2e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

Pour tout vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, on a :

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(2e_1 - e_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 - 2e_3) + z(e_1 + e_2 + e_3) \\ &= (2x + y + z)e_1 + (-x + y + z)e_2 + (x - 2y + z)e_3. \end{aligned}$$

Théorème 2.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big).$$

2.5 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Définition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de son image :*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big).$$

Théorème 2.4 (Théorème du rang)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\boxed{\dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim E}.$$

Remarque 2.4. *Le théorème du rang est un résultat fondamental. Il permet, par exemple, de déterminer la dimension du noyau si l'on connaît le rang, ou inversement.*

Corollaire 2.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = \dim F = n$ (finie). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective ;*
2. *f est surjective ;*
3. *f est bijective ;*
4. $\mathrm{rg}(f) = n$ *;*
5. $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exemple 2.5. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x+y,\ y+z,\ x+z)$. Calculons* $\ker(f)$ *:*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -y = x \\ x + x = 2x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z = 0.$$

Donc $\ker(f) = \{0\}$, *f est injective. Par le théorème du rang,* $\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim\ker(f) = 3$, *donc f est aussi surjective, donc bijective.*

2.6 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 2.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels avec $\dim E$ finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

1. *f est **injective** si et seulement si f transforme toute base de E en une famille **libre** de F ;*
2. *f est **surjective** si et seulement si f transforme toute base de E en une famille **génératrice** de F ;*
3. *f est **bijective** si et seulement si f transforme toute base de E en une **base** de F.*

Exemple 2.6. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x+y,\ x-y)$. Prenons la base canonique $(e_1, e_2) = ((1, 0),\ (0, 1))$. On a :*

$$f(e_1) = (1, 1), \quad f(e_2) = (1, -1).$$

Ces deux vecteurs sont libres (ils ne sont pas colinéaires), donc f est injective (et donc bijective).

2.7 Composition d'applications linéaires

Proposition 2.3. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.*

Remarque 2.5. *En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E. La loi de composition $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{End}(E)$.*

Proposition 2.4. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

1. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.*
2. *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme.*

Exemple 2.7. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y,\ x + y)$. Vérifions que f est bijective en déterminant son inverse. On résout $f(x, y) = (x', y')$:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = x' \\ x + y = y' \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 3y = x' \\ y = y' - x \end{cases} \implies 2x+3(y'-x) = x' \implies -x+3y' = x' \implies x = 3y'-x'.$$

Puis $y = y' - x = y' - (3y' - x') = -2y' + x'$. Donc :

$$f^{-1}(x', y') = (3y' - x',\ x' - 2y').$$

On vérifie aisément que f^{-1} est linéaire.

Proposition 2.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

1. $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$;
2. $\ker(g \circ f) \supseteq \ker(f)$;
3. $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

2.8 Exercices corrigés

Exercice 2.1. *Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :*

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (2x+3y,\ x^2)$;
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f_2(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$;
3. $f_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ f_3(P) = P(0)$.

Solution 2.1. *Déterminons si les applications sont linéaires.*

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $f_1(x,y) = (2x+3y,\ x^2)$**.**
   Pour qu'une application soit linéaire, elle doit vérifier $f(0) = 0$. *Calculons :*
   $$f_1(0,0) = (2\times 0 + 3\times 0,\ 0^2) = (0,0).$$
   La condition $f(0) = 0$ *est satisfaite. Vérifions maintenant l'additivité. Soient* $u = (x_1, y_1)$ *et* $v = (x_2, y_2)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$.
   $$f_1(u+v) = f_1(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = \Big(2(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)^2\Big).$$
   $$f_1(u) + f_1(v) = (2x_1+3y_1,\ x_1^2) + (2x_2+3y_2,\ x_2^2) = \Big(2x_1+3y_1+2x_2+3y_2,\ x_1^2+x_2^2\Big).$$
   Comparons les deuxièmes coordonnées : $(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ *en général (sauf si* $x_1 = 0$ *ou* $x_2 = 0$*). Par exemple, prenons* $u = (1,0)$ *et* $v = (1,0)$ *:*
   $$f_1(u+v) = f_1(2,0) = (4,\ 4), \quad f_1(u) + f_1(v) = (2,1) + (2,1) = (4,2).$$
   Donc $f_1(u+v) \neq f_1(u) + f_1(v)$.
   Conclusion : f_1 ***n'est pas linéaire***.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**,** $f_2(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$**.**
   Vérifions d'abord $f_2(0,0,0) = (0+0,\ 0+0) = (0,0)$.
   Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ *et* $v = (x_2, y_2, z_2)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f_2(\alpha u + \beta v) &= f_2\Big((\alpha x_1 + \beta x_2,\ \alpha y_1 + \beta y_2,\ \alpha z_1 + \beta z_2)\Big) \\ &= \Big((\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2),\ (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)\Big) \\ &= \Big(\alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2),\ \alpha(y_1+z_1) + \beta(y_2+z_2)\Big) \\ &= \alpha\Big(x_1+y_1,\ y_1+z_1\Big) + \beta\Big(x_2+y_2,\ y_2+z_2\Big) \\ &= \alpha f_2(u) + \beta f_2(v). \end{aligned}$$
   Conclusion : f_2 ***est linéaire***.
3. $f_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$**,** $f_3(P) = P(0)$**.**
   Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   $$f_3(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = \alpha f_3(P) + \beta f_3(Q).$$
   Conclusion : f_3 ***est linéaire***. *C'est la forme linéaire "évaluation en 0".*

Exercice 2.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$.

1. *Déterminer* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
2. f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Solution 2.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$.

1. ***Détermination de*** $\ker(f)$ ***:***
   $(x, y, z) \in \ker(f) \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + x = 0 \end{cases}$$

De la première équation : $y = -x$. *De la deuxième :* $z = -y = -(-x) = x$. *De la troisième :* $z + x = x + x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. *Alors* $y = 0$ *et* $z = 0$.
Donc $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$.
Détermination de $\mathrm{Im}(f)$ ***:***
L'image de f *est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = v_1,$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 0) = v_2,$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1, 1) = v_3.$$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3)$.
Étudions le rang de cette famille. Calculons le déterminant des trois vecteurs (dans $\mathbb{R}^3$*) :*

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 \times 1 - 1 \times 0) - 1(0 \times 1 - 1 \times 1) + 0(0 \times 0 - 1 \times 1)$$

$$= 1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 1 - (-1) = 2 \neq 0.$$

Les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 *sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de* $\mathbb{R}^3$.
Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ *et* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

2. ***Injectivité, surjectivité, bijectivité :***
   - $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ *donc* f *est* ***injective***.
   - $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ *donc* f *est* ***surjective***.
   - f *est à la fois injective et surjective, donc* f *est* ***bijective***.

Vérification avec le théorème du rang : $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 0 + 3 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. *La formule est bien vérifiée.*
Remarque : On pouvait aussi conclure directement car le déterminant de la matrice associée dans la base canonique est non nul.

Exercice 2.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (x + y,\ y + z,\ z + x)$.

1. *Déterminer* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
2. f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exercice 2.4. *Soit* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z,\ y + z + t,\ x + z + t).$$

Déterminer le rang de f.

Solution 2.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z,\ y + z + t,\ x + z + t).$$

Pour déterminer $\mathrm{rg}(f)$, *on cherche la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$. *L'image est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$f(e_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1) = v_1,$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0) = v_2,$$
$$f(e_3) = f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1) = v_3,$$
$$f(e_4) = f(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 1) = v_4.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset \mathbb{R}^3$. *Le rang de* f *est la dimension de ce sous-espace de* $\mathbb{R}^3$.

Étudions la dépendance linéaire de ces 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. *Formons une matrice dont les colonnes sont ces vecteurs :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires pour déterminer le rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice échelonnée avec 3 pivots non nuls. Donc le rang de cette matrice (et donc de la famille de vecteurs) est 3.

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, *ce qui signifie que* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ *(car* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension 3).*

Par conséquent : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$.

Vérification avec le théorème du rang : $\dim\ker(f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 3 = 1$, *donc le noyau est une droite vectorielle.*

CHAPITRE 3

LES MATRICES

Dans ce chapitre, on ne considère que des espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps $\mathbb{K}$. Cette dernière hypothèse permet d'étudier des applications linéaires entre ces différents espaces.

3.1 Espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes

3.1.1 Définition d'une matrice

Définition 3.1. *On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de scalaires ayant n lignes et p colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

*Les scalaires a_{ij} sont appelés les **coefficients** de la matrice. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. Si $n = p$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 3.1. — $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

— $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$.

Attention : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *est différente de* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

3.1.2 Opérations sur les matrices

Définition 3.2. *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *La* ***matrice nulle*** O *est celle dont tous les coefficients sont nuls.*
2. *La* ***somme*** $A + B$ *est la matrice* $(a_{ij} + b_{ij})$.
3. *Le* ***produit par un scalaire*** λA *est la matrice* (λa_{ij}).

Théorème 3.1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Sa dimension est* $n \times p$.

Remarque 3.1. *Les matrices élémentaires* E_{ij} *(1 à la position* (i, j)*, 0 ailleurs) forment une base de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, appelée* ***base canonique****.*

3.1.3 Matrice transposée

Définition 3.3. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. La* ***matrice transposée*** *de* A *est* $A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$*, alors* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriétés 3.1.
1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A^T)^T = A$

3.1.4 Multiplication de matrices

Définition 3.4. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*. Le* ***produit*** AB *est la matrice* $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ *définie par :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple 3.3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3.2. *Soient* A, B, C *des matrices de tailles compatibles.*

1. $(AB)C = A(BC)$ *(associativité)*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivité à gauche)*
3. $(A + B)C = AC + BC$ *(distributivité à droite)*
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

3.2 Anneau des matrices carrées

Définition 3.5. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *La **diagonale principale** de A est le n-uplet $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.*
- *La **matrice identité** I_n est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale.*
- *A est **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*
- *A est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.*
- *A est **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.*

Proposition 3.1. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $AI_n = I_nA = A$.*

Théorème 3.2. *$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire (non commutatif en général) d'unité I_n.*

3.2.1 Trace d'une matrice carrée

Définition 3.6. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est :*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propriétés 3.3.
1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

3.2.2 Puissance d'une matrice

Définition 3.7. *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :*

$$A^0 = I_n, \quad A^{p+1} = A^p \times A \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Proposition 3.2 (Formule du binôme)**.** *Si A et B commutent ($AB = BA$), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

3.3 Déterminant d'une matrice carrée

3.3.1 Définition et propriétés

Définition 3.8. *Le **déterminant** est une application* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *définie récursivement :*

- *Pour $n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$.*

— *Pour* $n \geq 2$ *:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}),$$

où A_{1j} *est la matrice obtenue en supprimant la 1ère ligne et la* j*-ième colonne.*

Exemple 3.4. *Pour* $n = 2$ *:* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Pour $n = 3$ *:* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$

Exemple 3.5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *alors*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 6$$

Propriétés 3.4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

1. *Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne (ou colonne).*
2. *Si* A *a une ligne (ou colonne) nulle,* $\det(A) = 0$*.*
3. *Si* A *a deux lignes (ou colonnes) identiques,* $\det(A) = 0$*.*
4. *Si* A *est triangulaire,* $\det(A)$ *est le produit des termes diagonaux.*
5. $\det(I_n) = 1$*.*
6. $\det(A^T) = \det(A)$*.*
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$*.*
8. *En permutant deux lignes (ou colonnes), le déterminant change de signe.*
9. *Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.*

3.3.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Proposition 3.3. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Pour tout* i *(développement selon la ligne* i*) :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Pour tout j *(développement selon la colonne* j*) :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

3.3.3 Matrices inversibles

Définition 3.9. *Une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est* ***inversible*** *s'il existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AB = BA = I_n$*. On note* A^{-1} *cette inverse. L'ensemble des matrices inversibles est noté* $GL_n(\mathbb{K})$*.*

Théorème 3.3. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*.*

Définition 3.10. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Le* ***cofacteur*** *de* a_{ij} *est* $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$*. La* ***comatrice*** *de* A *est* $\mathrm{com}(A) = (\Delta_{ij})$*.*

Théorème 3.4. *Si* $\det(A) \neq 0$*, alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{com}(A)^T.$$

Exemple 3.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *Le déterminant de cette matrice est déja calculé dans l'Exemple 3.5 et est égal à 6. Passons alors au calcul de la comatrice. On a*

$$com(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$A^{-1} = \frac{com(A)^T}{det(A)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -10 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Matrice associée à une application linéaire

3.4.1 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}'$:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{nj}f_n.$$

Définition 3.11. *La* ***matrice associée à*** f *par rapport aux bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *est :*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où la j*-ième colonne est formée des coordonnées de* $f(e_j)$ *dans* $\mathcal{B}'$*.*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} f(e_1) & . & . & . & f(e_j) & . & . & . & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1j} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2j} & . & . & . & a_{2p} \\ . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . & & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nj} & . & . & . & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 3.7. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y - z,\ x - 2y + 3z)$. Dans les bases canoniques :*

$$f(e_1) = (1, 1) = f_1 + f_2, \quad f(e_2) = (1, -2) = f_1 - 2f_2, \quad f(e_3) = (-1, 3) = -f_1 + 3f_2.$$

Donc $\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4.2 Matrice de passage

Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension p (finie). Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ deux bases de E.

Chaque vecteur u_j de la nouvelle base $\mathcal{C}$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$u_j = \sum_{i=1}^{p} p_{ij}\, e_i, \qquad j = 1, \ldots, p.$$

Les p^2 scalaires $p_{ij} \in \mathbb{K}$ forment une matrice carrée d'ordre p :

Définition 3.12. *La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$, est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\boxed{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) \in GL_p(\mathbb{K})}.$$

Autrement dit, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, la j-ième colonne de P est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

On peut visualiser cette définition sous la forme matricielle suivante :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \ldots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1p} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{p1} & p_{p2} & \cdots & p_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{array}$$

Propriété 3.1. *Une matrice de passage est toujours* ***inversible****. Son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\right)^{-1}.$$

Exemple 3.8. *Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de la base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec :*

$$u_1 = (3, 1, 1), \qquad u_2 = (2, -1, 1), \qquad u_3 = (-1, 1, -2).$$

On a immédiatement :

$$u_1 = 3e_1 + e_2 + e_3, \quad u_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \quad u_3 = -e_1 + e_2 - 2e_3.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est donc :

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Ses colonnes sont respectivement les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 3.9. *Reprenons l'Exemple 3.8. Calculons la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$. On cherche à exprimer e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{C}$. Après résolution du système linéaire, on obtient :*

$$e_1 = \frac{1}{7}(u_1 + 3u_2 + 2u_3), \quad e_2 = \frac{1}{7}(3u_1 - 5u_2 - u_3), \quad e_3 = \frac{1}{7}(u_1 - 4u_2 - 5u_3).$$

Donc :

$$Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

On vérifie bien que $Q = P^{-1}$ car $PQ = I_3$ (et $QP = I_3$).

Remarque 3.2. *Attention à l'ordre : la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ permet d'exprimer les* ***nouvelles*** *coordonnées (dans $\mathcal{C}$) en fonction des* ***anciennes*** *(dans $\mathcal{B}$). Plus précisément, si un vecteur $X \in E$ a pour coordonnées $[X]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ dans $\mathcal{B}$ et $[X]_{\mathcal{C}} = (x'_1, \ldots, x'_p)^T$ dans $\mathcal{C}$, alors :*

$$\boxed{[X]_{\mathcal{B}} = P\,[X]_{\mathcal{C}}} \quad et \quad \boxed{[X]_{\mathcal{C}} = P^{-1}\,[X]_{\mathcal{B}}}.$$

Exemple 3.10. *On reprend l'Exemple 3.8, et on se donne le vecteur $[X]_{\mathcal{B}} = (2, 1, -1) = 2e_1 + e_2 - e_3$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Donc les coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$ sont,*

$$[X]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[X]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{[X]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{[X]_{\mathcal{C}}}$$

donc $[X]_{\mathcal{C}} = \frac{4}{7}u_1 + \frac{5}{7}u_2 + \frac{8}{7}u_3$

Remarque 3.3 (Cas particulier important)**.** *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, et que l'on note $A = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ et $B = \mathbf{M}_{\mathcal{C}}(f)$ sa matrice dans la nouvelle base $\mathcal{C}$, alors :*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}.$$

*On dit que A et B sont **semblables**.*

Théorème 3.5 (Formule de changement de bases)**.** *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, munis respectivement de bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ pour E et $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ pour F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = Q^{-1}\,\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\;P}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$.

Remarque 3.4. *Si f est un endomorphisme ($E = F$) et si l'on prend la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, et $\mathcal{C}$ également, alors $P = Q$ et la formule devient :*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}\,\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)\;P.$$

*On dit que A et B sont **semblables**.*

3.4.3 Diagramme commutatif et changement de bases

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E, et $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ deux bases de F. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "A = \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)"] \arrow[d, "P"'] & (F,\mathcal{B}') \arrow[d, "Q"] \\
(E,\mathcal{C}) \arrow[r, "B = \mathbf{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

3.5 Rang d'une matrice

Définition 3.13. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses p vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.*

Propriétés 3.5.

1. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$
2. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$
3. $\mathrm{rg}(A) = n \iff$ *A est surjective (en tant qu'application linéaire)*
4. $\mathrm{rg}(A) = p \iff$ *A est injective*
5. *A est inversible* $\iff \mathrm{rg}(A) = n$

3.6 Opérations sur les matrices et applications linéaires

Proposition 3.4. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g), \qquad \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Proposition 3.5. *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

3.7 Exercices corrigés

Exercice 3.1. *Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la nouvelle base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ où :*

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 1).$$

1. *Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.*
2. *Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.*
3. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.

Solution 3.1. 1. *La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, u_3 dans la base $\mathcal{B}$:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Pour trouver $Q = P^{-1}$, calculons directement l'inverse. On trouve :*

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification : $P \times Q = I_3$ à l'ordre 10^{-2} près.

3. *La formule de changement de base pour un endomorphisme est $B = P^{-1}AP$. Donc :*

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons d'abord AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $B = Q(AP)$:

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2. *Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives 2 et 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ l'application linéaire définie par :*

$$f(e_1) = f_1 + f_2, \qquad f(e_2) = f_2 - f_3.$$

1. *Donner la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.*
2. *On considère une nouvelle base $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ de E où $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$, et une nouvelle base $\mathcal{C}' = (v_1, v_2, v_3)$ de F où $v_1 = f_1$, $v_2 = f_1 + f_2$, $v_3 = f_3$. Déterminer la matrice $B = \mathbf{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$.*

Solution 3.2. *1. Par définition, les colonnes de A sont les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans $\mathcal{B}'$:*

$$f(e_1) = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3, \quad f(e_2) = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (-1) \cdot f_3.$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Utilisons la formule $B = Q^{-1}AP$ où :*
   - *P = matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ (E).*
   - *Q = matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$ (F).*

   Calcul de** P **:

$$u_1 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad u_2 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcul de Q ***:***

$$v_1 = f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad v_2 = f_1 + f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad v_3 = f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Donc $Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Calcul de Q^{-1} ***:*** *Q est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc :*

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Calcul de $B = Q^{-1}AP$ ***:***

$$AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1+1 & 1-1\\0-1 & 0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$B = Q^{-1}(AP) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2 & 1-0\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}.$$

Vérifions directement : calculons $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans $\mathcal{C}'$.

$$f(u_1) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (f_1 + f_2) + (f_2 - f_3) = f_1 + 2f_2 - f_3.$$

Dans $\mathcal{C}' = (v_1, v_2, v_3)$: $f_1 = v_1,\ f_2 = v_2 - v_1,\ f_3 = v_3$. Donc :

$$f(u_1) = v_1 + 2(v_2 - v_1) - v_3 = -v_1 + 2v_2 - v_3.$$

$$f(u_2) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = (f_1 + f_2) - (f_2 - f_3) = f_1 + f_3 = v_1 + v_3.$$

Les coordonnées sont $(-1, 2, -1)$ pour $f(u_1)$ et $(1, 0, 1)$ pour $f(u_2)$, ce qui correspond bien à la matrice trouvée.

Exercice 3.3. *Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution 3.3. *Écrivons $A = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. On vérifie que $N^2 = 0$ et I_2 commute avec N. Par la formule du binôme :*

$$A^n = (I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = I_2 + \binom{n}{1} N = I_2 + nN.$$

Donc $A^n = \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Les déterminants représentent un outil très efficace pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. Dans ce chapitre, on commence par la définition générale d'un système linéaire, suivie des formes matricielle et vectorielle. La méthode de résolution de Cramer ainsi que le rang d'un système seront discutés.

4.1 Définition générale

4.1.1 Système linéaire

Définition 4.1. *Un* ***système linéaire*** *de n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est de la forme :*

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les inconnues sont les scalaires $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ et les a_{ij}, b_i sont des scalaires donnés.

Définition 4.2. — *Résoudre (S) revient à trouver tous les $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant toutes les équations.*

- — *(S) est dit* ***compatible*** *(ou possible) s'il admet au moins une solution.*
- — *(S) est dit* ***incompatible*** *(ou impossible) s'il n'admet aucune solution.*
- — *(S) est dit* ***homogène*** *si tous les $b_i = 0$.*

Remarque 4.1. *Un système homogène admet toujours la* ***solution triviale*** $(0, 0, \ldots, 0)$.

4.1.2 Écritures matricielle et vectorielle

Définition 4.3. *On pose :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

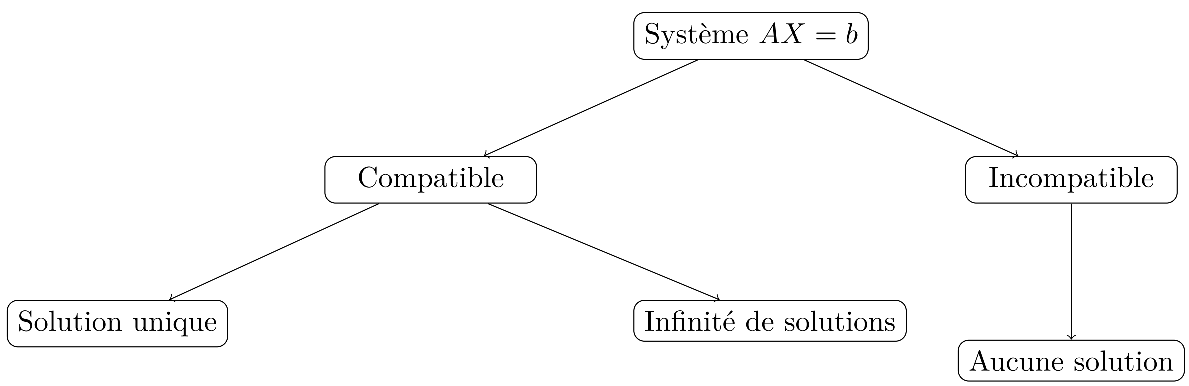
Le système (S) s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\boxed{AX = b}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est A. Le système s'écrit alors sous la forme vectorielle :

$$\boxed{f(X) = b}.$$

4.1.3 Classification des systèmes



Propriété 4.1. *Pour un système $AX = b$:*

- $b \in \mathrm{Im}(f) \iff$ *le système est compatible.*
- $b \notin \mathrm{Im}(f) \iff$ *le système est incompatible.*
- *Si le système est compatible, l'ensemble des solutions est $X_0 + \ker(f)$, où X_0 est une solution particulière.*

4.2 Rang d'un système

Définition 4.4. *On appelle **rang d'un système linéaire** le rang de sa matrice associée :*

$$\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A).$$

Théorème 4.1 (Théorème de Rouché-Fontené)**.** *Le système $AX = b$ est compatible si et seulement si :*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b),$$

où $(A|b)$ désigne la matrice augmentée obtenue en ajoutant la colonne b à A.

Propriété 4.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}(A) = r$.*

- *Si le système est compatible, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $p - r$.*
- ***Cas particulier** : Si $r = p$ (et $n \geq p$), la solution est unique (si elle existe).*
- *Si $r = n = p$, la matrice A est inversible : solution unique.*

Exemple 4.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons le système :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculons* $\det(A)$ *:*

$$\det(A) = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 0 = (1 - 2) - (0 - 1) = -1 + 1 = 0.$$

Donc $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. *Les deux premières lignes sont indépendantes, donc* $\mathrm{rg}(A) = 2$.

La matrice augmentée est $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *Effectuons des opérations élémentaires :*

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 - m \end{pmatrix}.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - m \end{pmatrix}.$$

- *Si $m \neq 1$, la dernière ligne est non nulle :* $\mathrm{rg}(A|b) = 3 \neq \mathrm{rg}(A) = 2 \to$ *système **incompatible**.*
- *Si $m = 1$, la dernière ligne est nulle :* $\mathrm{rg}(A|b) = 2 = \mathrm{rg}(A) \to$ *système **compatible**.*

Pour $m = 1$, on résout :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = 2 - x_2 \end{cases}$$

Avec x_2 libre. La solution s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Méthode du pivot de Gauss

Avant d'utiliser les formules de Cramer (qui sont lourdes pour $n \geq 4$), on présente la méthode du pivot de Gauss, qui est systématique et efficace.

Propriété 4.3 (Opérations élémentaires autorisées)**.** *Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système :*

1. *Permuter deux lignes.*
2. *Multiplier une ligne par un scalaire non nul.*
3. *Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.*

Exemple 4.2. *Résolvons par la méthode du pivot de Gauss :*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\
L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 : &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_2 : &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -6 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow -\frac{3}{7}L_3 : &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par remontée :

$$z = \frac{18}{7}, \quad y + \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{7} = 3 \Rightarrow y = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}, \quad x + \frac{15}{7} + \frac{18}{7} = 6 \Rightarrow x = 6 - \frac{33}{7} = \frac{9}{7}.$$

Donc la solution unique est $\left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

4.4 Systèmes de Cramer

Définition 4.5. *Un **système de Cramer** est un système à n équations et n inconnues dont la matrice associée est inversible, c'est-à-dire :*

$$\det(A) \neq 0.$$

Proposition 4.1. *Un système de Cramer possède une* ***solution unique*** *pour tout second membre b.*

Théorème 4.2 (Formules de Cramer)**.** *Soit $AX = b$ un système de Cramer. Les coordonnées de l'unique solution sont données par :*

$$\boxed{x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}}$$

où A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ième colonne de A par le vecteur b :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.3. *Résolvons par les formules de Cramer :*

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 4x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Calculons $\det(A)$ *:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-1) - 3(3-4) + 1(1-4) = 2(2) - 3(-1) + 1(-3) = 4 + 3 - 3 = 4.$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3-1) - 3(6-3) + 1(2-3) = 1(2) - 3(3) + 1(-1) = 2 - 9 - 1 = -8.$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-3) - 1(3-4) + 1(3-8) = 2(3) - 1(-1) + 1(-5) = 6 + 1 - 5 = 2.$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-2) - 3(3-8) + 1(1-4) = 2(1) - 3(-5) + 1(-3) = 2 + 15 - 3 = 14.$$

Donc :

$$x = \frac{-8}{4} = -2, \quad y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Remarque 4.2. *Les formules de Cramer sont théoriquement intéressantes mais numériquement inefficaces pour $n \geq 4$. La méthode du pivot de Gauss est préférable en pratique.*

4.5 Exercices corrigés

Exercice 4.1. *Discuter suivant le paramètre réel m le système :*

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

Solution 4.1. *La matrice A et son déterminant :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(A)$ *par un développement ou formule directe :*

$$\det(A) = -(m-1)^2(m+2).$$

Donc $\det(A) \neq 0 \iff m \neq 1$ *et* $m \neq -2$.
Cas 1 : $m \neq 1$ ***et*** $m \neq -2$. *Système de Cramer : solution unique.*
Cas 2 : $m = 1$. *Le système devient :*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow x + y + z = 1.$$

Une infinité de solutions : $x = 1 - y - z$, $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ *libres.*
Cas 3 : $m = -2$. *Le système devient :*

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Additionnons les trois équations : $(x + y - 2z) + (x - 2y + z) + (-2x + y + z) = 1 + 1 + 1$

$$(1 + 1 - 2)x + (1 - 2 + 1)y + (-2 + 1 + 1)z = 3 \Rightarrow 0 = 3.$$

Système incompatible. Pas de solution.
Conclusion :

- $m \neq 1$ *et* $m \neq -2$ *: solution unique.*
- $m = 1$ *: infinité de solutions (plan affine).*
- $m = -2$ *: aucune solution.*

Exercice 4.2. *Résoudre le système homogène suivant :*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Solution 4.2. *Calculons* $\det(A)$ *:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2)-1(-2-1)+1(4+1) = 1(-1)-1(-3)+1(5) = -1+3+5 = 7 \neq 0.$$

Donc la seule solution est la solution triviale :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

Exercice 4.3. *Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

Solution 4.3. *C'est un système homogène. Matrice augmentée (mais on peut ignorer la dernière colonne) :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$ *: une infinité de solutions. Deuxième équation :* $-3y+5z = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}z$*. Première équation :* $x + y - z = 0 \Rightarrow x = z - y = z - \frac{5}{3}z = -\frac{2}{3}z$*.*

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{z}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

C'est une droite vectorielle (dimension 1).

Exercice 4.4. *Déterminer a réel tel que le système ci-dessous admette une solution non triviale, et résoudre dans ce cas :*

$$\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solution 4.4. *C'est un système homogène. Il admet une solution non triviale si et seulement si* $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculons (développement par rapport à la première ligne) :

$$\det(A) = 1(a \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 2(2 \cdot 2 - 1 \cdot a) + a(2 \cdot 1 - a \cdot a)$$

$$= (2a - 1) - 2(4 - a) + a(2 - a^2)$$

$$= 2a - 1 - 8 + 2a + 2a - a^3$$

$$= -a^3 + 6a - 9$$

On remarque que $a = -3$ *est racine du polynome* $-a^3 + 6a - 9$.
Factorisons par $(a + 3)$ *:*

$$-a^3 + 6a - 9 = -(a + 3)(a^2 - 3a + 3).$$

Le discriminant de $a^2 - 3a + 3$ *est* $9 - 12 = -3 < 0$, *donc pas de racine réelle.*
Donc $\det(A) = 0 \iff a = -3$.
Pour $a = -3$, *le système devient :*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Résolvons : les trois équations sont liées. Prenons les deux premières :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Multiplions la première par -2 et ajoutons à la seconde :

$$(-2x - 4y + 6z) + (2x - 3y + z) = 0 \Rightarrow -7y + 7z = 0 \Rightarrow y = z.$$

Alors $x + 2z - 3z = 0 \Rightarrow x = z$.
Donc les solutions sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Anton and R. C. Busby, *Contemporary Linear Algebra*,John Wiley and Sons, Inc, 2003.

[2] S. Balak, F. Sturm, *Algèbre et analyse*. 2ème édition revue et augmentée. METIS LyonTech, 2014.

[3] N. Basbois, P. Abbrugiati, *Algèbre (Cours et exercices corrigés)*. 1ère année. De Boeck. 2013.

[4] W. Cheney and D. Kincaid, *Linear Algebra - Theory and applications*, Jones and Bartlett Publishers, 2009.

[5] P. M. Cohn, *Basic Algebra (Groups, Rings and Fields)*, Springer, 2005.

[6] D.S. Dummit, R.M. Foote, *Abstract Algebra*. Third edition. Wiley, 2004.

[7] J. Franchini et J. C. Jacquens, *Algèbre : cours, exercices corrigés, travaux dirigés*, Ellipses, Paris, 199.

[8] M. Gaultier, *ALGEBRE, Exercices et Problèmes*. DUNOD, Paris, 2008.

[9] A. Hitta, *Cours d'algèbre et exercices corrigés*, 3ème édition. OPU : 06-2009.

[10] S. Lang, *Algèbre : cours et exercices*, 3ème édition, Dunod, 2004.

[11] J-P. Lecoutre, P. Pilibossian, *Algèbre*. 4ème édition. Dunod, Paris, 2014.

[12] M.Mignotte et J. Nervi, *Algèbre : licences sciences 1ère année*, Ellipses, Paris, 2004.

[13] M. H. Mortad, *Basic Linear Algebra : Exercises and solutions*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2026.

[14] M.H. Mortad, *exercices corrigé d'Algèbre*. 1ère année LMD. Edition " Dar Houma" (Alger-Algérie).2015.

[15] D. Perrin, *Cours d'algèbre*. ellipses/ édition marketing S.A, 1996.

[16] R. T. Smith and R. B. Minton, *Calculus*, Third Edition, McGraw-Hill, 2007.

[17] M. Queysanne, *Algèbre*. Premier cycle et préparation aux grandes écoles. OPU : 1984.