Introduction :

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur la dérivée d'ordre non entier dés la fin du 17ème siècle.
L'origine du calcul fractionnaire remonte à l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a motivé les chercheurs à introduire le calcul fractionnaire était :
Est-ce que la dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f}{dx^n}$ peut être étendue à avoir un sens lorsque n est une fraction ?
La réponse à cette question a donné naissance à l'analyse fractionnaire.

Notions de base :

1) Espaces L^p : Soit $\Omega =]a,b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace L^p comme suit :

- Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables sur Ω, c'est-à-dire :

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \text{, } f \text{ mesurable.}$$

$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un Banach.

- Pour $p = 2$, $L^2(\Omega) = \{ f \,/\, f \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega, \int_\Omega f^2(x)dx < \infty \}$
$(L^2(\Omega); \langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est le produit scalaire.

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\cdot g(x)\,dx \quad , \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

- Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.

f est dite essentiellement bornée sur Ω, s'il existe $M > 0$ telle que :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 \ / \ |f(x)| \leq M, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Quelque fonctions utiles :

Dans cette section, on présente quelques fonctions spéciales comme la fonction Gamma, bêta et la fonction de Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans le calcul fractionnaire.

1) Fonction Gamma d'Euler :

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt$$

Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.

Exemple : Calculons $\Gamma(1)$ et $\Gamma(\frac{1}{2})$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{-1/2} \cdot dt$$. En posant : $u = \sqrt{t}$, on obtient :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{u} 2u\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = \sqrt{\pi}$$

Lemme : La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$

Propriétés: Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t>0$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

1) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.
2) $\Gamma(n+1) = n!$
3) $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\, n!}$

Corollaire : La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières est donnée par la formule :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}, \quad 0 \leq x+n \leq 1.$$

Exemple: Calculons $\Gamma(-\frac{1}{2})$, dans ce cas $n=1$.

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})} = -2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}.$$

2) Fonction Bêta :

Définition : La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de première espèce : $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$, $\forall p,q>0$.

Propriétés: • Les fonctions Gamma et Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

• La fonction Bêta est symétrique, ce qui signifie que : $B(p,q) = B(q,p)$.

• On peut prendre aussi la forme d'intégrale :

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta,$$ par le changement : $t = (\sin\theta)^2$.

3) Fonction Mittag-Leffler :

Définition : La fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha>0).$$

La fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie par:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \ , \quad (\alpha,\beta > 0).$$

Exemple :

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z.$$

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right)$$

$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z).$$

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Transformation de Fourier :

Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

La transformation de Fourier est définie par :

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt} \cdot f(t)\,dt = \hat{f}(iw).$$

La transformation inverse est donnée par :

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}\,\hat{f}(iw)\,dw = f(t).$$

Transformation de Laplace :

Une fonction f est dite d'ordre exponentiel si :

$\exists$ M et $\alpha > 0$ / $|f(t)| < M e^{at}$, $\forall t > T$.

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

On appelle transformée de Laplace de $f(t)$, la fonction :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)\,dt \quad , \ s \in \mathbb{C}.$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $F(s)$.

Remarque : La fonction f doit être d'ordre exponentiel pour que F soit bien définie.

Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = e^{t^2}$.

Exemples :

- Soit la fonction de Heaviside : $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

$$\mathcal{L}\{H(t) ; s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} . dt = \frac{1}{s} \quad , \quad Re(s) > 0 .$$

- Soit la fonction : $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{f(t) ; s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} . e^{at} dt = \frac{1}{s-a} \quad , \quad Re(s) > a .$$

Transformée inverse :

La transformée inverse de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) ; t\} = f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{st} . ds .$$

Exemples : • $F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3}$, alors : $f(t) = 4e^{3t} - e^{-t}$.

• $F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$, alors : $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.