Fiche de TD 2

Exercice 1

Huit étudiants mesurent la longueur d'onde de la raie verte du mercure en utilisant une fente fine éclairée par la lampe, une lentille et un réseau, ils obtiennent les résultats suivants :

i n° Etudiant	1	2	3	4	5	6	7	8
λ (nm)	538,2	554,3	545,7	552,3	566,4	537,9	549,2	540,3

1- Calculer la valeur moyenne de λ et l'écart type
2- Compte tenu l'écart type donner le domaine de confiance de la valeur annoncée de λ
On tient compte maintenant du coefficient de Student, on donne pour la confiance de 68% le tableau suivant :

nombres de mesures n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
Coefficient de Student t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1,00

3- Calculer le nouveau domaine de confiance sur l'estimation de λ
4- Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 2

Un fabricant indique pour un panneau isolant en cellulose une conductivité thermique de 0,039 W/m/K. La valeur est certifiée à 5% près. Vous voulez vérifier si c'est vrai, pour cela vous prenez dix panneaux au hasard et vous mesurez leurs conductivités respectives ($mW.m^{-1}.K^{-1}$) :

39,1	38,8	39,5	39,2	38,9	39,1	39,2	41,1	38,6	39,3

Les valeurs sont-elles conformes à celles annoncées par le fabricant (il considère une confiance de 95% sur la marge donnée) ? Pourrait-il, selon vos résultats, annoncer une autre marge ?

Exercice 3

- Calculer l'intégrale de la fonction de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$$

2- Calculer la valeur moyenne d'une grandeur x notée E(x) suivant la distribution de Gauss.
3- Calculer la variance (écart quadratique moyen) noté V(x).

Exercice 4

Montrer que :

1-

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx = 0.68$$

2-

Chargée de Matière : ILES N.

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} p(x)dx = 0.95$$

1- Représentez sur un même graphique les domaines de confiance des fonctions erreur des deux questions précédentes

Exercice 5

Soit un tissu synthétique dont la résistance à la rupture (en Newton) est une variable aléatoire X, qui suit la loi normale N(800, 144). Un acheteur exige que ce tissu ai une résistance à la rupture d'au moins 772.
Calculer la proportion de tissu qui vérifie cette exigence.

Exercice 6

À l'aide d'une pipette jaugée nous remplissons quatre béchers avec *100 mL* d'eau chacun. Pour tester la pipette et connaître précisément la quantité d'eau, nous effectuons quatre pesées au décigramme et nous obtenons, ramené en *mL*, les résultats suivants pour les différents béchers
V_1={100,1 ; 100,0 ; 99,9 ; 100,0}

1- Calculez la moyenne et l'écart-type de V_1. Estimez la précision de la pipette avec une confiance de 95%.

Nous remplissons maintenant deux béchers et rassemblons le contenu des deux dans un seul :
$V = V_1 + V_2$.

Correspondant à V_1, nous avons les mesures suivantes pour V_2 :

V_2={100,0 ; 100,1 ; 100,0 ; 99,9}

Par exemple pour la troisième mesure nous avons V_1=99,9 mL et V_2=100,0 mL.

2- Montrez que V_1 et V_2 sont des grandeurs indépendantes.

3- Calculez la moyenne de V, son écart-type et l'incertitude ΔV à 95%.

4- Pourriez-vous retrouver ce résultat avec la formule de propagation des incertitudes ?

Exercice 7

On mesure 10 fois la longueur d'une pièce mécanique à l'aide d'un mètre pliant dont les graduations sont espacées de 0.5 mm, on obtient les résultats suivants :
L = 449.5 ; 500.0 ; 501.0 ; 502.0 ; 501.0 ; 499.5 ; 501.5 ; 500.0 ; 501.5 ; 500.0 mm
Déterminer l'incertitude d'une mesure ainsi de la valeur moyenne lors de la mesure de la longueur de l'objet sachant que le niveau de confiance est de 95%

Exercice 8

Afin de remonter à l'incertitude relative de la mesure d'une résistance *ΔR/R*, on mesure la différence de potentiel U avec une incertitude relative de 1% et le courant I avec une incertitude de 0.1%, trouver la valeur de l'incertitude relative sur la mesure de cette résistance.

Chargée de Matière : ILES N.

Corrigé fiche TD 2

Exercice 1

1/ λ_m = 548.04 nm ; σ = 9.72 nm (écart type) ; σ' = $\sigma/\sqrt{8}$ = 3.44 nm (écart quadratique moyen)

2/ le domaine de confiance :

Compte tenu de l'écart type σ : [538.3 , 557.8] nm

Compte tenu de l'écart quadratique moyen : [544.6, 551.5] nm

3/ Confiance 68 % et n=8 donc t = 1.08

$$\lambda = \lambda_m \pm \frac{t\sigma}{\sqrt{8}}$$

$\lambda =$ 548.0 $\pm$ 3.7 nm

4/ Compte tenu de la confiance annoncée, le domaine correspondant est : [544.3, 551.8]

Seuls les mesures des étudiants n°3 et n°7 appartiennent au nouveau domaine de confiance.

Exercice 2

La valeur moyenne des conductivités thermiques C_m =39.3 mW/mK ;

L'écart type : σ = 0.7 mW/mK

Compte tenu de l'écart type : $C =$ 39.3 $\pm$ 0.7 mW/mK

Le domaine de confiance est : [38.6 , 40.0] mW/mK

La confiance est de 95% et n=10, compte tenu de la table du coefficient de Student : t= 2.23

$$C = C_m \pm \frac{t\sigma}{\sqrt{10}}$$

$C =$ 39.3 $\pm$ 0.5 mW/mK

Le nouveau domaine de confiance correspondant est : [38.8 , 39.8] mW/mK

Les panneaux avec des conductivités thermiques 41.1 et 38.6 mW/mK ne se trouvent pas dans le domaine de confiance.

Chargée de Matière : ILES N.

Exercice 3

1/ Traité en cours en utilisant le carré de l'intégral et les coordonnées polaires

2/

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \phi(x;\mu,\sigma^2)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu+\mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.
\end{aligned}$$

Posons $z = x-\mu$, alors $x = z+\mu$, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} z\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dx}_{=1} \\
&= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma^2 \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \mu \\
&= 0+\mu \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

3/

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] \\
&= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \phi(x;\mu,\sigma^2)dx - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx - \mu^2.
\end{aligned}$$

Posons $z = x-\mu$, alors $x = z+\mu$, et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z+\mu)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\mu z\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz + 2\mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz}_{=0} \\
&\quad + \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz}_{=1} - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz.
\end{aligned}$$

En résolvant cette intégrale par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= -\sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz \\ &= 0 + \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] dz}_{=1} \\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Exercice 4

1/

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 = \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} p(x)dx + \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx + \int_{\mu+\sigma}^{+\infty} p(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{\mu-\sigma} p(x)dx = \int_{\mu+\sigma}^{+\infty} p(x)dx$ (graphiquement, symétrie par rapport à l'axe des y)

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx = 1 - 2\int_{-\infty}^{\mu-\sigma} p(x)dx$$

On effectue le changement de variable : $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{\mu-\sigma} p(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \varphi(z)dz$$

Avec : $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ et $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Sachant que : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx = 1 - 2(1 - \Phi(1))$$

D'après le tableau de la fonction de partition : $\Phi(1) = 0.841$

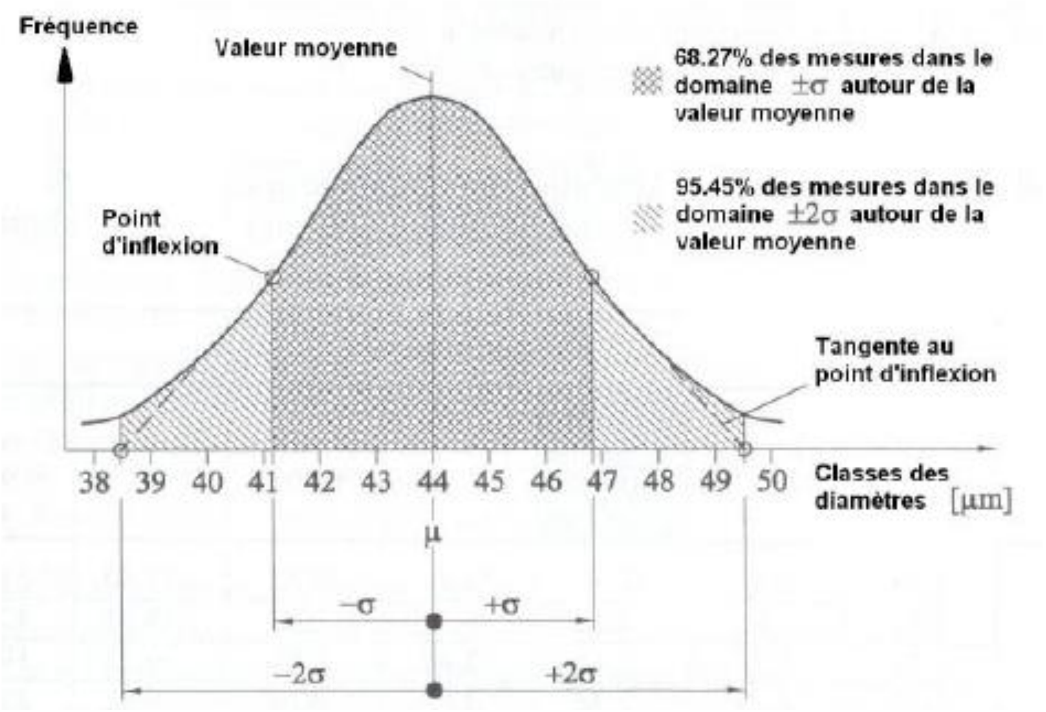
$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)dx = 0.68$$

2/ De la même manière :

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} p(x)dx = 1 - 2(1 - \Phi(2))$$

$$\Phi(2) = 0.977$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} p(x)dx = 0.95$$



Exercice 5

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = -0.19$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)dz = 1 = \int_{-\infty}^{-0.19} \varphi(z)dz + \int_{-0.19}^{+\infty} \varphi(z)dz$$

$$\int_{-0.19}^{+\infty} \varphi(z)dz = 1 - \int_{-\infty}^{-0.19} \varphi(z)dz = \ 1 - 1 - \int_{-\infty}^{0.19} \varphi(z)dz = \quad 0.575$$

La proportion de tissu ayant une résistance d'au moins 772 N est de 57.5%

Exercice 6

1/ $V_{1m} = 100\, ml$ $\qquad \sigma_1 = 0.08ml$

$$V_1 = \ V_{1m} \pm \frac{t\sigma}{\sqrt{4}} = 100 \ \pm 0.1\, ml$$

2/

	V_1	V_2	$V = V_1 + V_2$
1	100.1	100	200.1
2	100	100.1	200.1
3	99.9	100	199.9
4	100	99.9	199.9

$r_{12} = 0$ les Volumes V_1 et V_2 sont parfaitement indépendants.

3/ $V_m = 200$ ml $\sigma = 0.2ml$

$$V = V_m \pm \frac{t\sigma}{\sqrt{4}} = 200 \pm 0.2\, ml$$

4/ La formule de propagation des incertitudes pour une fonction dépendant x_i variables :

$$\Delta f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 (\Delta x_i)^2$$

$\Delta V = 0.14$ ml

Exercice 7

$L_m = 495.6$ mm

$\sigma = 16.2$

t(95%)=2.23

L = 495.6 ± 11.4 mm

Exercice 8

R=U/I

$$\Delta R^2 = \left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^2 (\Delta U)^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I}\right]^2 (\Delta I)^2$$

$$\frac{\Delta R}{R} = 1\%$$