

Département de Physique

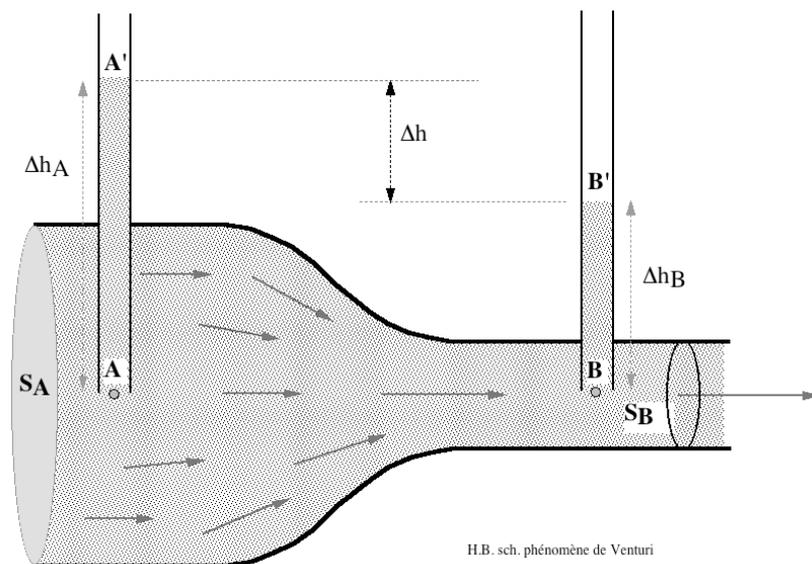
Pr. MOULAYAT Nasreddine

Mécanique des Fluides

Cours

Et

Exercices résolus



AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est le fruit d'une expérience pédagogique acquise ces dernières années dans le cadre de l'enseignement de la mécanique des fluides assuré aux étudiants de l'université Oran1, et de l'école préparatoire des sciences et techniques d'Oran.

Conformément aux programmes en vigueur, l'enseignement de cette matière est articulé en cinq grands chapitres, la statique des fluides, la cinématique des fluides, les phénomènes de surface, la dynamique des fluides parfaits et enfin la dynamique des fluides réels.

Dans un souci pédagogique, j'ai présenté séparément la cinématique des fluides, la dynamique des fluides parfaits et la dynamique des fluides réels.

Un bref rappel de mathématiques qui constitue les formules usuelles utilisées en mécanique des fluides est donné en annexe pour familiariser le lecteur au formalisme consacré et lui faciliter la compréhension de cet ouvrage.

Après chaque chapitre quelques exercices bien choisis et résolus ayant fait l'objet de devoirs ou d'exercices de travaux dirigés sont proposés pour permettre au lecteur de juger de son degré réel de compréhension, il est évident que le nombre d'exercices proposés reste insuffisant, il appartiendra au lecteur de se perfectionner en diversifiant ses sources de connaissance.

Par ailleurs, une liste de références d'ouvrages est fournie pour stimuler l'intérêt du lecteur.

L'auteur

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

1. La matière: forces d'interaction moléculaire	6
2. Les transformations de phases ou les changements d'état.....	6
3. Aspect continu d'un fluide – Particule fluide.....	7

Chapitre 1

Statique des Fluides

1. Introduction	8
2. Equation fondamentale de l'hydrostatique	9
3. Application aux fluides incompressibles	10
4. Application aux fluides compressibles (Gaz).....	13
5. Poussée d'Archimède.....	14
6. Applications:.....	16
a) Principe de Pascal.....	16
b) Mesure de la pression:.....	17
- Manomètre	
- Baromètre	
7. Forces de pression : Poussée sur une paroi verticale.....	19
8. Forces de pression : Poussée sur une paroi non verticale.....	21
<i>Exercices d'application</i>	22

Chapitre 2

Cinématique des Fluides

1. Description d'un fluide en mouvement	29
a) Description Lagrangienne et Eulerienne	29
b) Notion de trajectoire, de ligne de courant, de tube de courant et des équipotentiels	29
2. Dérivation suivant la méthode d'Euler: Dérivée particulaire.....	30
3. Equation de continuité ou de conservation de la masse.....	32
4. Champ de vitesse d'un fluide.....	34
5. Etude de différents types de champ de vitesse:	35
a) Notion de circulation.....	35
b) Caractérisation de divers écoulements.....	35
- <i>Ecoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses</i>	
- <i>Ecoulements rotationnels: théorie tourbillonnaire</i>	
- <i>Ecoulement potentiel avec circulation</i>	
<i>Exercices d'application</i>	38

Chapitre 3

Phénomènes de surface

1. Introduction: L'interface liquide pur-gaz.....	51
2. Tension superficielle.....	51
3. Travail de surface – Energie libre de surface.....	52
4. Effet de la température sur la tension superficielle.....	53
5. Equation de Laplace.....	53
6. L'interface liquide-solide: Le phénomène de mouillage.....	54
a) Mise en évidence expérimentale.....	54
b) Ligne et angle de raccordement – Mouillage.....	54
c) Conditions d'équilibre de la ligne de contact entre trois phases....	55
7. Montée capillaire: Loi de Jurin.....	56
<i>Exercices d'application</i>	58

Chapitre 4

Dynamique des Fluides Parfaits

1. Equation de Navier-Stokes.....	60
2. Equation de Navier-Stokes pour les fluides non-visqueux (fluides parfaits).....	60
3. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli Par l'équation fondamentale de la dynamique.....	61
4. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli Par le théorème de l'énergie cinétique	62
5. Notions de débit à travers une surface élémentaire.....	63
a) Débit massique élémentaire à travers la surface dS	
b) Débit volumique.	
c) Densité de courant	
d) Conservation de la masse en régime permanent.	
e) Conservation du volume	
6. Théorème de Bernoulli généralisé: Ecoulements avec échange d'énergie	66
7. Applications du Théorème de Bernoulli : a) Tube de Pitot.....	67
b) Phénomène de Venturi.....	68
c) Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir (Théorème de Torricelli)	69
<i>Exercices d'application</i>	70

Chapitre 5

Dynamique des Fluides Réels

1. Introduction: fluide réel	76
2. Profil des vitesses.....	76
3. Notions de viscosité.....	77
- Viscosité dynamique	
- Viscosité cinématique	
4. Champ de vitesse unidirectionnel de la forme : $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$	77
5. Régimes d'écoulement: Nombre de Reynolds.....	79
6. Equation fondamentale de la dynamique des fluides visqueux.....	80
7. Ecoulement des liquides visqueux: Ecoulement laminaire dans les conduites cylindriques: (Lois de Poiseuille).....	81
8. Equivalence: Loi de Poiseuille, loi d'Ohm.....	83
9. Notions de pertes de charge.	83
a) Pertes de charge régulières	
b) Pertes de charge singulières	
10. Théorème de Bernoulli généralisé.....	84
11. Pertes de Charge régulières ou de frottement pour les différents types d'écoulement: (Formule de Colebrook: Diagramme de Moody).....	85
12. Pertes de Charge singulières.....	89
13. Résistance des fluides au mouvement des corps immergés	89
Loi de Stokes.	
<i>Exercices d'application</i>	96
Annexe : Formulaire mathématique	107
Bibliographie	110

Chapitre 0

Introduction

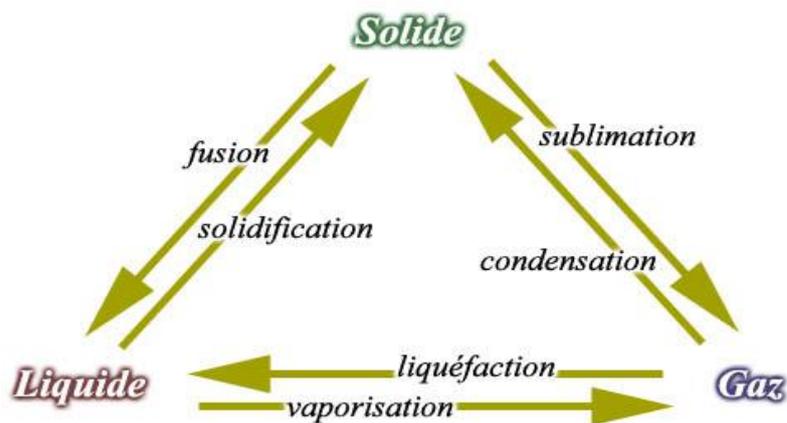
1. La matière :

On distingue 3 états de la matière :

- L'état solide: liaisons fortes entre les atomes
- L'état liquide: forces de liaison moyennes
- L'état gazeux: forces de liaison très faibles

2. Les transformations de phases ou les changements d'état :

- Fusion: transformation de la matière de l'état solide à l'état liquide
- Liquéfaction: transformation de la matière de l'état gazeux à l'état liquide
- Condensation: transformation de la matière de l'état gazeux à l'état solide
- Vaporisation (gazéification) : transformation de la matière de l'état liquide à l'état gazeux.
- Solidification: C'est l'inverse de la fusion, appelée également congélation lorsque la transformation est réalisée à basses températures.
- Sublimation: transformation de la matière de l'état solide à l'état gazeux.



3. Aspect continu d'un fluide – Particule fluide :

La mécanique des fluides se compose de l'étude des fluides au repos (hydrostatique) et des fluides en mouvement (hydrodynamique).

La mécanique des fluides est notamment appliquée dans la marine, l'océanographie, la météorologie et la médecine.....

Contrairement aux solides une masse donnée d'un fluide ne garde pas une forme bien déterminée mais varie avec la forme du contenant dans lequel elle se trouve, en effet les notions de masse et de force utilisées en mécanique classique (newtonienne) seront remplacées respectivement par les notions de masse volumique et de pression.

Chapitre 1

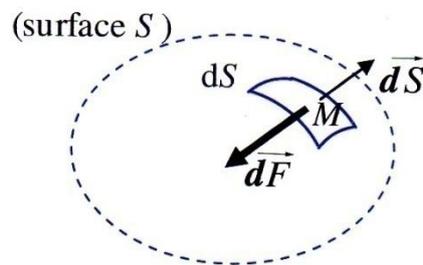
Statique des Fluides

1. Introduction :

a) Forces pressantes :

Les fluides exercent des forces de contact qui sont des forces pressantes ou forces de pression. Ces forces s'exercent aussi bien sur les bords du récipient qu'à l'intérieur même du fluide

b) Pression en un point du fluide :



Si on isole dans un fluide un volume V fictif délimité par une surface S fermée, les particules extérieures à V exercent sur une surface élémentaire dS (centrée sur le point M) de S la force pressante \vec{dF} normale pour un fluide au repos à dS

$$\vec{dF} = -p \vec{dS} = -p ds \vec{n}$$

$$[p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} ; \text{ Unité (S.I.) : Pa}$$

Remarque : dans le cas d'un fluide en mouvement, cette force pressante n'est plus forcément normale à dS .

La force de pression agit vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface

c) Autres unités utilisées :

Le bar : Avec : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

L'atmosphère (atm) : Avec : $(1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar})$

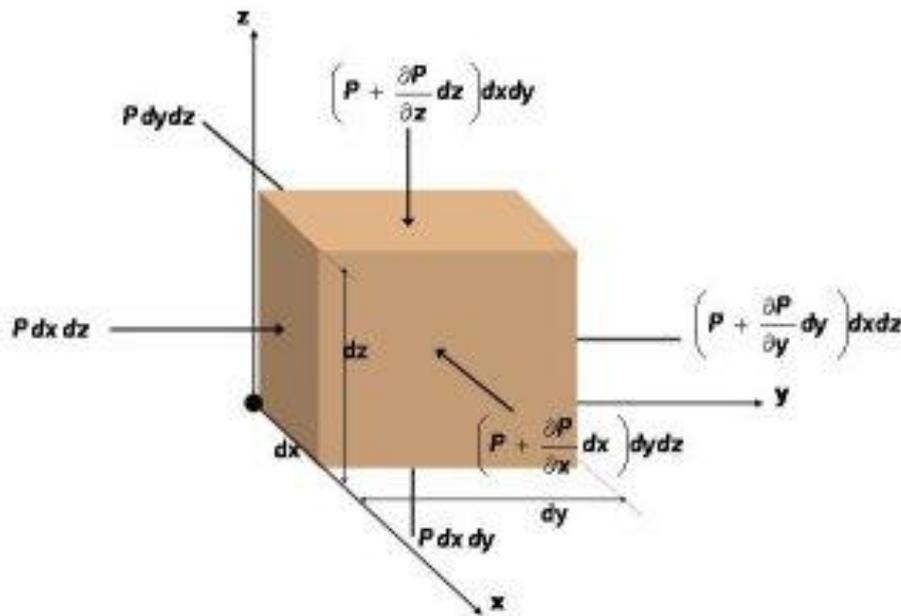
Le millimètre de mercure (mm Hg) : Avec : $(760 \text{ mm de Hg} = 1 \text{ atm})$

Le mètre de colonne d'eau (m CE) : Avec : $(10 \text{ m de CE} = 1 \text{ bar})$

2. Equation fondamentale de l'hydrostatique :

On considère un élément de volume de fluide de forme parallélépipède de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, dans un repère cartésien :

Le Bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume fluide sont:



Les forces de volume : le poids : $d\vec{P} = dm\vec{g} = dv \vec{g}$

Les forces de surface : forces de pression : $d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k}$

$$dF_z = [p(z) - p(z + dz)] dx dy$$

Par un développement limité au premier ordre : $P(z + dz) = p(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

$$\text{D'où: } dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$$

Par analogie sur les deux autres axes :

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dV$$

$$dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dv$$

$$\overrightarrow{dF} = - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dV \Rightarrow \overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

On a donc: $\overrightarrow{dP} = dm \vec{g} = \rho dV \vec{g}$ et $\overrightarrow{dF} = -\vec{\nabla} p dV$

En vertu du principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF} = \rho dV \vec{\gamma} \Rightarrow \rho dV \vec{g} - \vec{\nabla} p dV = \rho dV \vec{\gamma} \Rightarrow \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{\gamma}$$

Dans ce cas le fluide est au repos : $\vec{\gamma} = \vec{0}$

Notre équation devient :

$$\rho \vec{g} = \vec{\nabla} p$$

La projection de cette équation vectorielle sur notre repère cartésien nous donne : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ (équation différentielle de l'hydrostatique).

C'est l'équation à résoudre pour connaître la pression en tout point d'un fluide au repos.

3. Application aux fluides incompressibles :

Un fluide est dit incompressible si l'on peut considérer que sa masse volumique en tout point reste constante.

ρ : est une constante

En appliquant l'équation différentielle de l'hydrostatique :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{cste} \text{ ce qui nous donne :}$$

$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = - \int \rho g dz = -\rho g \int dz = -\rho g z + \text{Cste}$$

$$\text{Soit : } p(z) + \rho g z = \text{Cste}$$

$$\text{On pourra écrire : } p_1(z_1) + \rho g z_1 = p_2(z_2) + \rho g z_2 = \text{Cste}$$

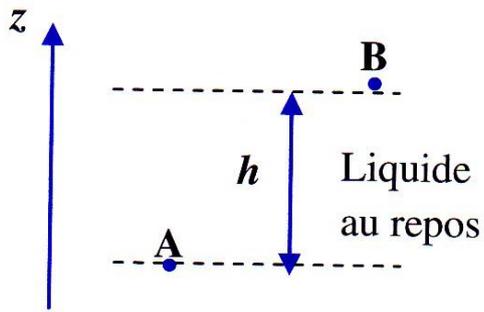
$$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$

Considérons une colonne de fluide d'une hauteur ($z_B - z_A = h$)

$p_A = p$; $p_B = p_0 = p_{\text{atm}}$ (pression atmosphérique)

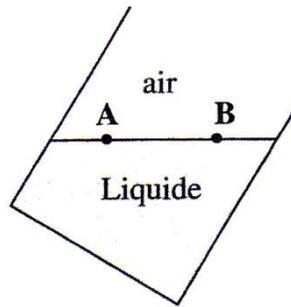
En appliquant la relation ci-dessus, il vient : $p - p_0 = \rho g h \Rightarrow$

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h$$



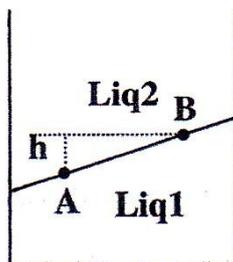
Remarques:

1) Egalité de pression d'un liquide sur un même plan horizontal :



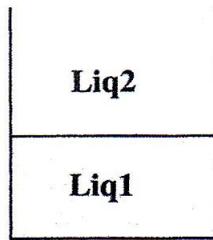
$p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ donc $z_A = z_B$ la surface libre d'un liquide est horizontale

2) L'interface entre deux liquides non miscible est horizontale :



$$p_A = p_B + \rho_1 g h$$

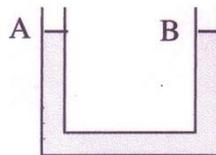
$$p_A = p_B + \rho_2 g h$$



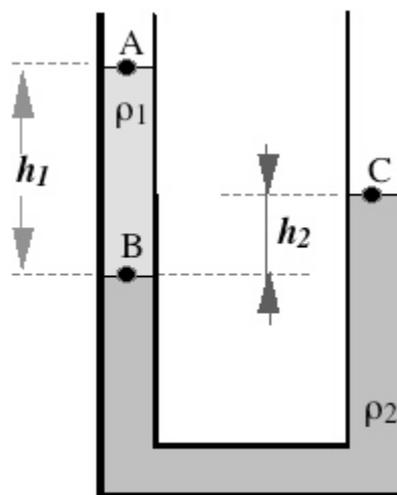
Comme $\rho_1 \neq \rho_2$ on doit avoir $h=0$

3) Principe des vases communicants :

- Si le fluide est homogène (ρ est le même partout) alors les niveaux en A et B sont les mêmes.



- Pour un fluide non homogène formé de deux liquides non miscibles de densités différentes ρ_1 et ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), les niveaux en A et C sont différents.



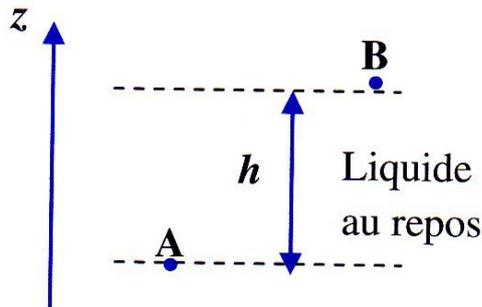
H. B. sch. tu be en U deu x liquides

En effet, sur le même plan horizontal du liquide (ρ) les pressions sont les mêmes : $p_A = p_C = p_0$ (pression atmosphérique).

$$\begin{aligned} \text{On a: } p_B &= p_A + \rho_1 g h_1 \\ &\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \\ p_{B'} &= p_C + \rho_2 g h_2 \end{aligned}$$

Et comme $\rho_2 > \rho_1 \Rightarrow h_2 < h_1$, le niveau du liquide dense est plus bas.

4) Pression absolue et pression effective :



$p_A = p$ et $p_B = p_{\text{atm}}$ (pression atmosphérique)

$p = p_{\text{atm}} + \rho gh$ est la pression absolue

$p = \rho gh$ est la pression effective
(pression mesurée par rapport à la pression atmosphérique)

4. Application aux fluides compressibles : Gaz

ρ n'est pas une constante

Soit un gaz parfait $pV = nRT$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

On a : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$ avec M : masse molaire du gaz :

$\Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT} p$ la masse volumique est fonction de la pression (compressibilité)

En partant de la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(p)g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{M}{RT} pg \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} g dz$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{M}{RT} g dz \Rightarrow \ln p = -\frac{M}{RT} gz + C \text{ (Cste)}$$

$$p(z) = C' \exp\left(-\frac{M}{RT} gz\right)$$

Si en $z=z_0$ $p=p_0 \Rightarrow p_0 = C' \exp\left(-\frac{M}{RT} gz_0\right) \Rightarrow C' = p_0 \exp\left(\frac{M}{RT} g z_0\right)$

$$\Rightarrow p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{M}{RT} g (z - z_0)\right]$$

5. Poussée d'Archimède : Effort exercée sur un objet totalement immergé :

La force exercée par le fluide sur un objet immergé de volume V délimité par une surface S fermée s'exprime par :

$$\vec{F} = \oint_S -p \vec{n} dS$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski qui permet de passer d'une intégrale de surface fermée à une intégrale de volume telle que :

$$\oint_S -p \vec{n} dS = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV$$

On trouvera donc : $\vec{F} = -\iiint_V \vec{\nabla} p dV$

Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \Rightarrow \vec{F} = -\iiint_V \vec{\nabla} p dV = -\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

En supposant g constant sur tout le volume :

$$\vec{F} = -\vec{g} \iiint_V \rho dV = -\rho V \vec{g}$$

C'est une force opposée au poids du fluide déplacé ; ce qui définit justement la poussée d'Archimède.

1) Poussée d'Archimède : Théorème

Tout corps plongé dans un fluide est soumis de la part de ce fluide à une action appelée poussée d'Archimède :

Cette force est :

- Appliquée au centre de poussée : centre de gravité de la partie immergée du corps.
- Verticale.
- Dirigée vers le haut
- D'intensité $F = \rho \cdot V_{immerg\acute{e}} \cdot g$

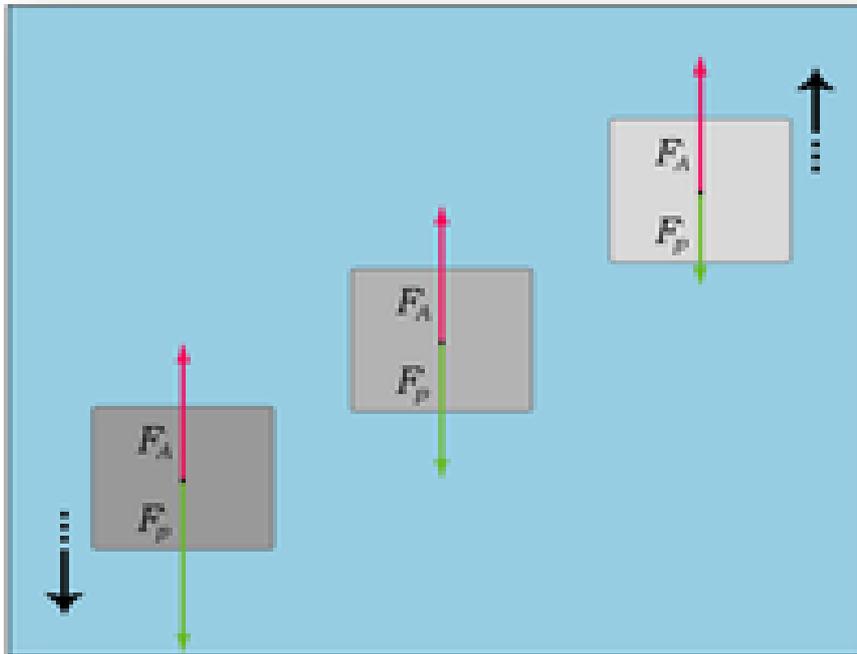
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3)

g : intensité de la pesanteur

$V_{immerg\acute{e}}$: volume immergé du corps en (m^3)

2) Applications :

a) Exemple d'un solide entièrement immergé :



Trois solides de densités différentes peuvent subir une poussée d'Archimède inférieure, égale ou supérieure à leur poids.

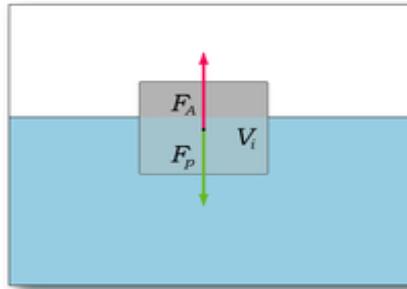
Immergeons entièrement un solide de volume V , de masse m et de masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f uniforme, puis relâchons-le à partir du repos. Au départ, la vitesse étant nulle, deux forces seulement agissent sur le solide : son poids F_P (vers le bas) et la poussée d'Archimède F_A (vers le haut).

$$\text{On a : } F_P = \rho Vg ; F_A = \rho_f Vg \Rightarrow \frac{F_P}{F_A} = \frac{\rho}{\rho_f}$$

Le rapport des masses volumiques est équivalent à celui des densités.

- Si la densité du solide est supérieure à celle du fluide, alors $F_P > F_A$ et le solide coule.
- Si la densité du solide est égale à celle du fluide, alors $F_P = F_A$ et le solide demeure immobile ; il est en équilibre neutre ou indifférent.
- Si la densité du solide est inférieure à celle du fluide, alors $F_P < F_A$ et le solide remonte vers la surface.

b) Exemple d'un solide flottant à la surface d'un liquide :



La poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.

En réalité, le point d'application de la poussée d'Archimède devrait se trouver au centre du volume immergé, donc plus bas que le centre de gravité du solide.

Considérons un solide de volume V et de masse volumique ρ_S flottant à la surface d'un liquide de masse volumique ρ_L . Si le solide flotte, c'est que son poids est équilibré par la poussée d'Archimède: $F_A = F_p$

La poussée d'Archimède étant égale (en grandeur) au poids du volume de liquide déplacé (équivalent au volume V_i immergé), on peut écrire :

$$\rho_L V_i g = \rho_S V g$$

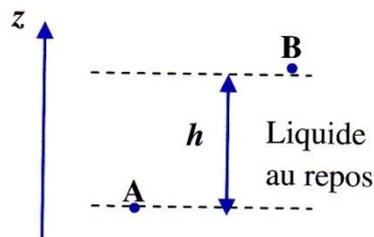
Le volume immergé vaut donc :

$$V_i = \frac{\rho_S}{\rho_L} \cdot V$$

$$\text{Puisque : } V_i < V \Rightarrow \rho_S < \rho_L$$

6. Applications :

a) Principe de Pascal :



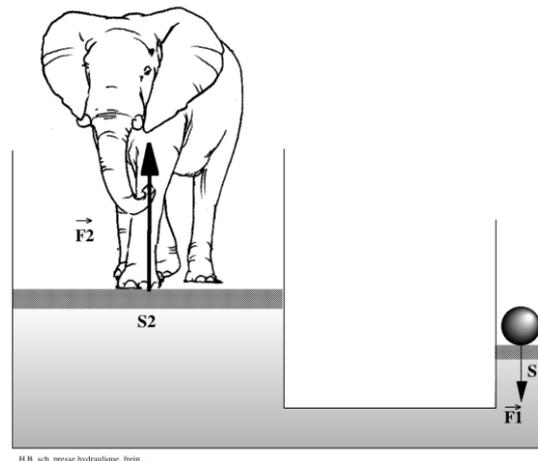
$$p_A = p_B + \rho g h$$

Si p_A varie de Δp , alors p_B doit également varier de Δp .

Un liquide étant considéré comme incompressible, toute variation de pression en un point de ce liquide est transmise à tous les points

Application : vérins et presses hydrauliques : crics.....

Soient un grand piston de section S_2 et un petit piston de section S_1



On exerce une force \vec{F}_1 sur le petit piston (S_1), l'augmentation de pression est $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$, d'où une surpression en (S_2) : $p_2 = \frac{F_2}{S_2}$.

D'après le théorème de Pascal : $p_A = p_B \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$

b) Mesure de la pression:

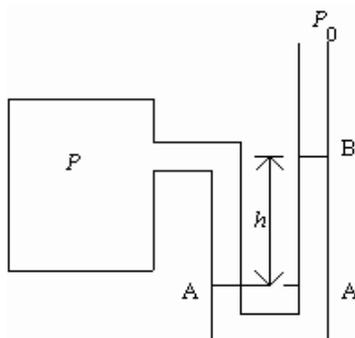
❖ Manomètre :

Un manomètre est un instrument destiné à mesurer la différence de pression.

Entre un gaz contenu dans une enceinte fermé et la pression atmosphérique.

Il s'agit donc d'un appareil de mesure relative

- Principe du plus simple des manomètres :



- Le gaz est contenu dans un volume limité. Il présente donc la même pression en tout point :

$$p_A = p$$

- Par contre, le liquide possède la même pression le long d'un plan horizontal :

$$p_{A'} = p$$

- L'équation fondamentale de l'hydrostatique appliquée à un fluide incompressible s'écrit dans notre cas :

$$p_A - p_0 = \rho g h \Rightarrow p_A = p_0 + \rho g h$$

Remarques:

- Dans le cas où $p_A < p_B$, le niveau du mercure en B serait au dessous du niveau A.
- Le liquide utilisé étant fréquemment le mercure, l'emploi du millimètre de mercure (mm Hg) comme unité usuelle de pression est assez répandu. La relation entre pression et hauteur se simplifie :

$$p - p_0 = \rho g h \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = h$$

- Sensibilité de l'appareil :

Elle est définie comme le rapport de la plus petite variation de niveau décelable associée à la variation de pression correspondante :

$$s = \frac{\Delta h}{\Delta p} \text{ ou } s = \frac{\Delta h}{\rho g \Delta h} = \frac{1}{\rho g}$$

La sensibilité est donc d'autant plus grande que la masse volumique du liquide manométrique sera faible.

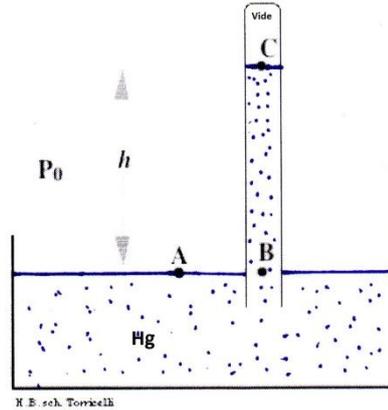
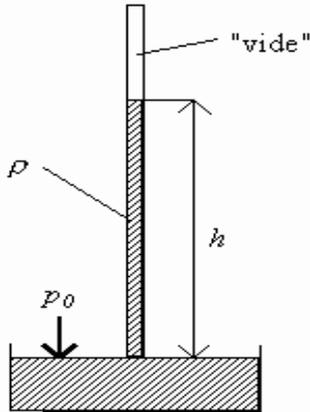
❖ Les baromètres

Définition :

Ce sont des appareils permettant la mesure absolue de la pression ; plus particulièrement la mesure de la pression atmosphérique.

Principe :

Il est fondé sur l'expérience de Torricelli qui consiste à retourner sur une cuve à mercure un tube rempli de mercure. La longueur du tube doit dépasser 760 mm. Il apparaît alors au sommet du tube retourné un espace vide appelé "chambre barométrique".



En A, on a la pression atmosphérique P_0 .

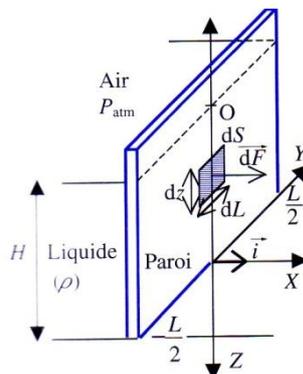
$$p_B - p_C = \rho_{Hg} g h = p_A = p_0$$

Pour une pression atmosphérique de 1013 mbar, on aura

$$h = \frac{p_0}{\rho_{Hg} \cdot g} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.8} = 0.760 \text{ m} = 760 \text{ mm de mercure (Hg)}.$$

7. Forces de pression : Poussée sur une paroi verticale plane :

a) Calcul de la poussée \vec{F} exercée par le liquide seul sans tenir compte de la pression atmosphérique :



$$\vec{dF} = p \vec{dS} = \rho g z \vec{dS} \text{ avec } dS = dy dz$$

Et $S = L \cdot H$ (surface de contact paroi – liquide)

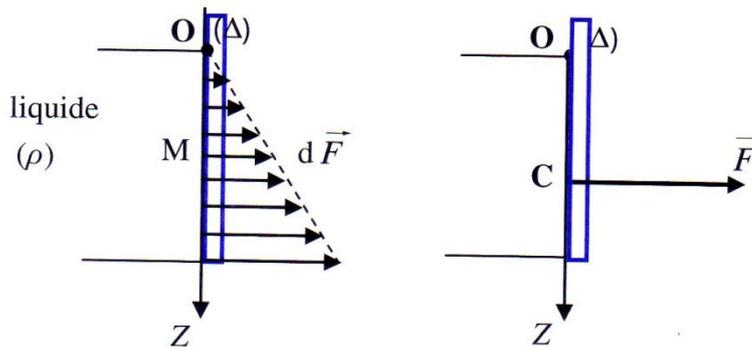
Donc $dF = \rho g z dy dz$

$$F = \iint \rho g z dy dz = \rho g \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{z=0}^{z=H} z dz = \rho g [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^H$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} \rho g L H^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot S \cdot H$$

b) Centre de poussée :

Il s'agit du point d'application C de la poussée résultante \vec{F} , qui se trouve par symétrie sur l'axe Oz.



Soit Δ un axe fictif autour duquel la paroi pouvait tourner si elle n'était soumise qu'aux forces de poussée

On rappelle que le moment d'une force par rapport à un axe Δ est :

$$\Gamma(\vec{F}/\Delta) = \Gamma\left(\int \vec{dF}\right)/\Delta$$

$\Gamma(\vec{F}/\Delta)$ = moment d'une force par rapport à un axe Δ

= $F \cdot$ (distance entre Δ et la droite d'action de \vec{F})

$$\Gamma(\vec{F}/\Delta) = OC \cdot F = OC \cdot \frac{1}{2} \rho g L H^2$$

D'une autre manière on a :

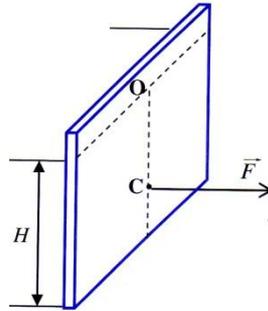
$$\Gamma\left(\int \vec{dF}\right)/\Delta = \overline{OM} \wedge \vec{dF} = z \cdot dF$$

$$\text{Donc } \Gamma(\vec{F}/\Delta) = \iint z \cdot \rho g z dy dz = \rho g \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{z=0}^{z=H} z^2 dz$$

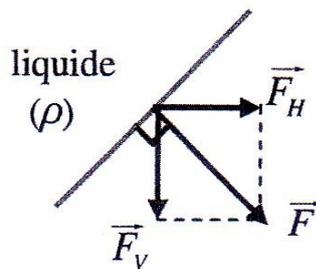
$$\Gamma (\vec{F} / \Delta) = \frac{1}{3} \rho g L H^3$$

En comparant les deux équations, on en déduit :

$$OC = \frac{2}{3} \cdot H$$



8. Poussée sur une paroi plane non verticale :



La résultante des forces de pression exercées par un liquide sur une surface :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_V$$

\vec{F}_H composante horizontale de \vec{F} . Son module $|\vec{F}_H|$ est égal à la force qu'exercerait le liquide sur la projection verticale de la surface et s'applique au centre de poussée de la surface projetée.

\vec{F}_V composante verticale de \vec{F} . Son module $|\vec{F}_V|$ est égal au poids du liquide au dessus de la surface.

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Exercices d'application:

Exercice n° 1:

Le liquide 1 est moins dense que le liquide 2: $\rho_1 = 998 \text{ kg.m}^{-3}$; et $\rho_2 = 1022 \text{ kg.m}^{-3}$

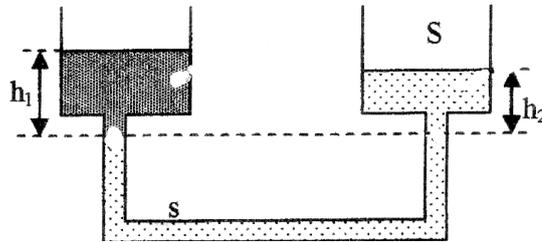
1) La pression p au-dessus des liquide est la même. Etablir une relation entre h_1 et h_2 .

2) On augmente la pression au-dessus du liquide 1 de $p = 10\text{Pa}$. Sachant que la surface des grands récipients est $S = 100\text{cm}^2$ et celle du tube en U les reliant $s = 1\text{cm}^2$.

Exprimez les nouvelles hauteurs des liquides h'_1 , et h'_2 : en fonction de h_1 , h_2 , du déplacement des surfaces libres et de celui de la surface de séparation des deux hquides.

Calculez ce dernier.

3) Si on peut apprécier un déplacement de la surface de séparation de 1 mm. quelle est la sensibilité de ce manomètre ?



Solution :

1) Soient les deux points A et B situés sur le même plan horizontal :

$$p_A = p_B$$

$$p_A = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad p_0 \text{ étant la pression atmosphérique}$$

$$p_B = p_0 + \rho_2 g h_2$$

2)

ΔH étant la différence de hauteur dans le récipient

Δh étant la différence de hauteur dans le tube

$$\text{On a : } h'_1 = h_1 + \Delta h - \Delta H \quad \text{et} \quad h'_2 = h_2 + \Delta h + \Delta H$$

$$\text{La conservation du volume déplacé : } \Delta H \cdot S = \Delta h \cdot s \Rightarrow \Delta H = \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

Les deux équations précédentes deviennent :

$$h'_1 = h_1 + \Delta h - \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

$$h'_2 = h_2 + \Delta h + \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

De la même manière :

$$p'_A = p'_B$$

$$p_{A'} = p_0 + \Delta p + \rho_1 g h'_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h'_1 + \Delta p = \rho_2 g h'_2 \quad \Delta p \text{ étant la pression ajoutée}$$

$$p_{B'} = p_0 + \rho_2 g h'_2$$

$$p_0 + \Delta p + \rho_1 g h'_1 = p_0 + \rho_2 g h'_2$$

En remplaçant h'_1 et h'_2 par leurs valeurs respectives On trouvera :

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{g \left[\rho_2 \left(1 + \frac{S}{S} \right) - \rho_1 \left(1 - \frac{S}{S} \right) \right]}$$

A.N. $\Delta h = 2.26 \text{ cm}$

3) Pour $\Delta h = 1 \text{ mm} \Rightarrow \Delta p = 0.44 \text{ Pa}$

Exercice n° 2 :

Le réservoir de la figure possède deux piézomètres A et B contenant deux liquides non miscibles Trouver

- La hauteur de la surface liquide dans le piézomètre A.
- La hauteur de la surface liquide dans le piézomètre B.
- La pression totale dans le fond du réservoir

Solution :

- 1) Le liquide A s'élèvera dans le piézomètre A à la même hauteur que le liquide A dans le réservoir ($h = 2 \text{ m}$)
- 2) Le liquide B s'élèvera dans le piézomètre B à la hauteur de $h_B = 0.3 \text{ m}$, plus une hauteur additionnelle h'_B due à la pression p_A exercée par le liquide A.

Calculons cette pression p_A :

$$p_A = \rho_A g h_A = 12007 \text{ Pa} \quad \text{avec } h_A = 1.7 \text{ m}$$

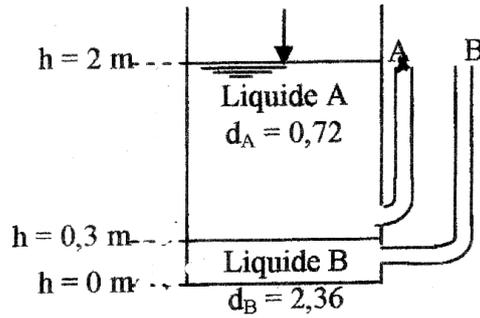
$$\text{La hauteur } h'_B \text{ est donc : } h'_B = \frac{p_A}{\rho_B g} = 0.519 \text{ m}$$

Enfin le liquide B s'élèvera dans le piézomètre B à la hauteur :

$$h_T = h_B + h'_B = 0.3 \text{ m} + 0.519 \text{ m} = 0.819 \text{ m}$$

- 3) La pression totale au fond du réservoir est :

$$p_T = \rho_A g h_A + \rho_B g h_B = 18950 \text{ Pa}$$



Exercice n° 3 :

Lors d'un prélèvement on introduit un tube cylindrique dans un récipient de manière à ce que la moitié de la longueur ($L/2$) soit remplie par le liquide à prélever (1). L'extrémité supérieure du tube est alors fermée par un doigt et le tube est tiré (2), Une partie du liquide s'écoule hors du tube, On admet que l'air se comporte comme un gaz parfait ($PV = Cste$).

On appellera ρ la masse volumique du liquide, $\pi R^2 = A$ la section droite du tube, et P_0 la pression atmosphérique, On néglige la variation de la pression atmosphérique avec L

1) Exprimer la pression P de l'air dans le tube en fonction de

a) de P_0 , L et h

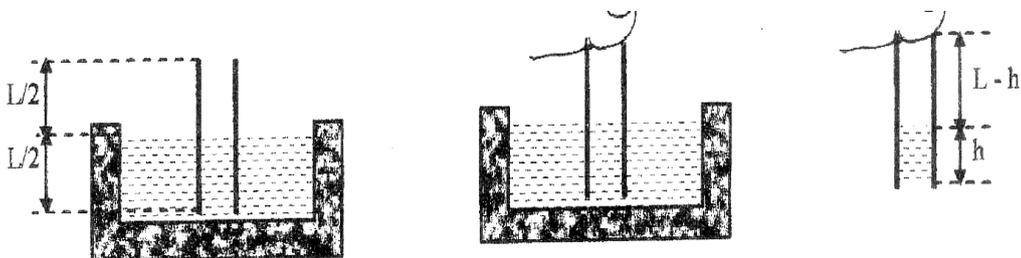
b) de P_0 , ρ et h .

2) Exprimer h en fonction de la longueur du tube L et d'une nouvelle variable $H = \frac{P_0}{\rho g}$ où ρ

est la masse volumique du liquide et g l'accélération terrestre.

3) Calculer h pour $\rho = \rho_{Hg} = 13.6 \text{ g.cm}^{-3}$ et pour $\rho = \rho_{eau} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$.

On prendra $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ et $P_0 = 10^5$ pascals, $L = 20 \text{ cm}$.



Solution :

1)

Supposons que l'air se comporte comme un gaz parfait :

$$pV = n R T = Cste$$

a) $p_0 \frac{A \cdot L}{2} = n R T$ (tube à l'intérieur du récipient)

$$\Rightarrow p = p_0 \frac{L}{2(L-h)}$$

b) $p A (L - h) = n R T$ (tube à l'extérieur du récipient)

Tube à l'extérieur du récipient, appliquons l'équation de l'hydrostatique :

$$p_0 = \rho g h + p \Rightarrow p = p_0 - \rho g h \Rightarrow p_0 - \rho g h = p_0 \frac{L}{2(L-h)}$$

2) Comme $\frac{p_0}{\rho g} \Rightarrow p_0 = \rho g H$, on remplace p_0 par cette valeur dans l'équation

$$\rho g H - \rho g h = \rho g H \frac{L}{2(L-h)}$$

Enfin on obtient l'équation suivante :

$$2 h^2 - 2 (H + L)h + HL = 0$$

Les solutions de cette équation sont : $h = \frac{(L+H) \pm \sqrt{L^2 + H^2}}{2}$

3) Une des deux solutions est valable, on trouvera donc :

Pour le mercure : $h_{Hg} = 8.7 \text{ cm}$

Pour l'eau : $h_{eau} = 10 \text{ cm}$

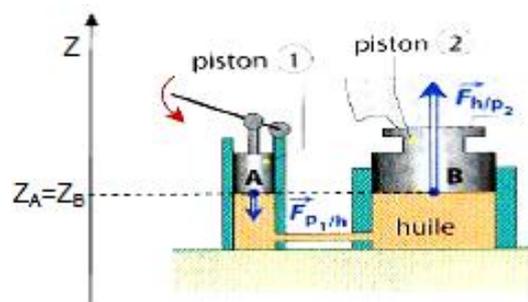
Exercice 4 :

La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire. Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit au point (A), par une force de pression $F_{p1/h}$ sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force $F_{h/p2}$.

On donne :

- les diamètres de chacun des pistons : $D_1 = 10 \text{ mm}$; $D_2 = 100 \text{ mm}$.

- l'intensité de la force de pression en A : $F_{p1/h} = 150 \text{ N}$.



1) Déterminer la pression P_A de l'huile au point A

2) Quelle est la pression P_B au point B ?

3) En déduire l'intensité de la force de pression $F_{h/p2}$; Que peut-on conclure ?

Solution :

1) Pression P_A de l'huile au point A:

$$p_A = \frac{4 \cdot F_{p1/h}}{\pi \cdot D_1^2} \quad \text{AN: } p_A = \frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 0.01^2}$$

2) En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points A et B:

$$p_A - p_B = \rho g (z_A - z_B) \quad \text{Or } z_A = z_B \text{ donc } p_A = p_B = 19 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3) Force de pression en B :

$$F_{h/P2} = P_B \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \quad \text{AN: } F_{h/P2} = 19 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 0.1^2}{4} = 14922.56 \text{ N}$$

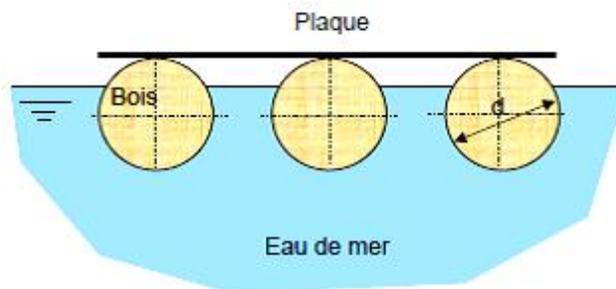
Conclusion:

On constate que la force $F_{p1/h} = 150 \text{ N}$ est relativement faible par rapport à $F_{h/P2} = 14922,56 \text{ N}$.

Avec ce système nous avons atteint un rapport de réduction de force presque 100. Ce rapport correspond au rapport des diamètres des cylindres. On utilise souvent le même principe de réduction d'effort dans plusieurs applications hydrauliques (exemple: presse hydraulique).

Exercice 5 :

On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de trois poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.



On donne:

- les dimensions d'une poutre: diamètre $d = 0,5 \text{ m}$ et longueur $L = 4 \text{ m}$.
- la masse volumique du bois : $\rho_{\text{bois}} = 700 \text{ kg/m}^3$.
- la masse volumique de l'eau de mer: $\rho_{\text{mer}} = 1027 \text{ kg/m}^3$.
- la masse de la plaque $M_c = 350 \text{ kg}$.
- l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

- 1) Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.
- 2) Ecrire l'équation d'équilibre de la plate-forme.
- 3) En déduire la fraction $F(\%)$ du volume immergé des poutres.
- 4) Déterminer la masse M_c maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger complètement.

Solution :

1) Poids total de la plate-forme :

$$P_0 = (M_P + 3 \cdot M_b) \cdot g = \left(M_P + 3 \cdot \rho_{\text{bois}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L \right) \cdot g$$

$$\text{AN: } \left(350 + 3 \cdot 700 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot 4 \right) \cdot 9.81 = 19613,49 \text{ N}$$

2) Equation d'équilibre : $P_0 =$ Poussée d'Archimède.

3) $P_{\text{Arch}} =$ poids du volume d'eau déplacé

$$P_{\text{Arch}} = 3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g = P_0 \Rightarrow V_{\text{immergé}} = \frac{P_0}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g}$$

$$\text{La fraction du volume immergé : } F\% = \frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{poutre}}} \cdot 100 = \frac{P_0}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V_{\text{poutre}}} \cdot 100$$

$$\text{AN: } \frac{19613,49}{3 \cdot 1027 \cdot 9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4} \cdot 4} \cdot 100 = 82,62 \%$$

4) Poutre complètement immergée : $F(\%) = 100 \%$ c'est-à-dire $V_{\text{immergé}} = V_{\text{poutre}}$

$$\frac{P_0 + M_c \cdot g}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g} = V_{\text{poutre}} \quad \text{on obtient : } M_c = \frac{1}{g} (3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V_{\text{poutre}} - P_0)$$

$$\text{AN: } M_c = \frac{1}{9,81} \left(3 \cdot 1027 \cdot 9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4} \cdot 4 - 19613,49 \right) = 420,47 \text{ Kg}$$

Exercice 6 :

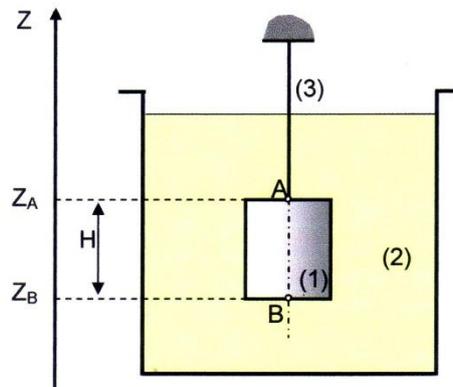
On considère un cylindre (1) en acier, de rayon R et de hauteur H . Ce cylindre est suspendu par un fil (3) à l'intérieur d'un récipient contenant de l'huile (2).

1) Déterminer à l'équilibre l'expression de la tension T du fil en utilisant la Relation Fondamentale de la Dynamique.

2) Retrouver la même expression en appliquant le théorème d'Archimède.

3) Application numérique :

$R = 0,1 \text{ m}$ et $H = 0,2 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; la masse volumique de l'huile $\rho_{\text{huile}} = 824 \text{ kg/m}^3$; la masse volumique de l'acier $\rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg/m}^3$.



Solution :

1) A l'équilibre : En appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \sum \vec{F}_L = \vec{0}$$

$\sum \vec{F}_L$ Forces de pression sur la surface latérale

La projection de cette équation vectorielle sur l'axe z nous donne :

$$T - mg - P_A \cdot S + P_B \cdot S = 0$$

P_A : Pression en A et P_B : Pression en B

$$\text{Avec } P_B - P_A = \rho_{\text{Huile}} g H \Rightarrow T = mg - (P_B - P_A)S = \rho_{\text{acier}} S H g - \rho_{\text{Huile}} g H S$$

$$\Rightarrow T = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) S g H = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) \pi R^2 g H.$$

2) A l'équilibre : en appliquant le théorème d'Archimède :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{AR} = \vec{0}$$

\vec{F}_{AR} étant la force ou la poussée d'Archimède :

La projection de cette équation différentielle selon l'axe z nous donne :

$$T - mg + F_{AR} = 0$$

$$F_{AR} = \rho_{\text{Huile}} V_{\text{imm}} g = \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g \text{ avec } V_{\text{imm}} = \pi R^2 H$$

$$\text{On a : } T = mg - F_{AR}$$

$$\Rightarrow T = \rho_{\text{acier}} V g - \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g \Rightarrow T = \rho_{\text{acier}} \pi R^2 H g - \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g$$

$$\text{Donc } T = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) \pi R^2 g H$$

$$\text{A.N : } T = 429.5 \text{ N}$$

Chapitre 2

Cinématique des Fluides

1. Description d'un fluide en mouvement :

Décrire le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en Mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un écoulement où il y a déformation continue du fluide.

a) Description Lagrangienne et Eulerienne :

On peut comme en mécanique classique suivre une particule fluide et connaître à chaque instant sa position au cours du temps, et déterminer ainsi sa vitesse, cette méthode appelée méthode de Lagrange s'avère délicate et difficile à appliquer pour le fluide dont on peut difficilement suivre les particules, on utilisera donc une autre méthode appelée méthode d'Euler qui consiste à connaître la vitesse des particules au cours du temps car la connaissance du champ de vitesse étant suffisante pour la description du fluide en mouvement.

Les composantes du vecteur vitesse \vec{v} sont fonction des variables (x, y, z, t) , soient : $v_x = v_x(x, y, z, t), v_y = v_y(x, y, z, t), v_z = v_z(x, y, z, t)$

L'expression du vecteur vitesse est : $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

L'écoulement du fluide est **permanent ou stationnaire** si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps t $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, il est dit non -permanent si cette condition n'est pas remplie.

L'écoulement du fluide est **uniforme** si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace ; il est non -uniforme si cette condition n'est pas remplie.

b) Notion de trajectoire, de ligne de courant, de tube de courant et des équipotentiels :

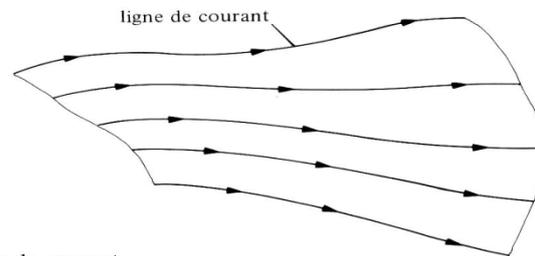
-On appelle **ligne de courant** une courbe dont la direction tangente en chacun de ses points est la direction du vecteur vitesse. Le vecteur vitesse $\vec{v} (v_x, v_y, v_z)$ est donc colinéaire au vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM} (dx, dy, dz)$.

L'équation d'une ligne de courant se calcule par intégration des équations

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \text{ en coordonnées cartésiennes.}$$

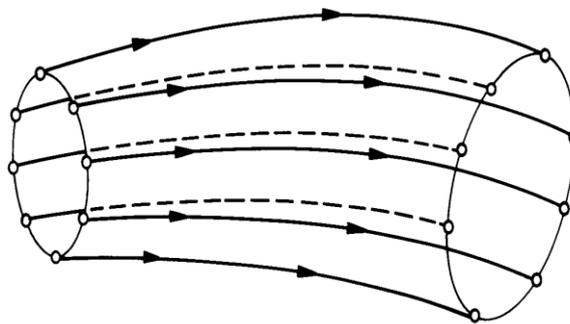
et $\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}$, en coordonnées cylindriques

Les lignes de courant se confondent avec **la trajectoire** des particules du fluide en régime permanent.



Ligne de courant

-On appelle **tube de courant** un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Tube de courant

-Une **équipotentielle** est une ligne ou une surface où le potentiel des vitesses est constant : $\varphi = Cte$.

2. Dérivation suivant la méthode d'Euler et Dérivée particulière :

Considérons la fonction scalaire $f(x, y, z, t)$ rendant compte d'une grandeur physique caractéristique du fluide au point de coordonnées x, y, z et au temps t . La particule fluide au temps $t + dt$ sera au point de coordonnées

$$x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$$

La variation de la fonction f sera donc égale à :

$$df = f(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - f(x, y, z, t) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial f}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial f}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

La dérivée $\frac{df}{dt}$, que l'on note $\frac{Df}{Dt}$ et que l'on appelle **Dérivée particulière de la fonction scalaire f** , est égale à :

$$\frac{Df}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})f + \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) f$$

Cette dérivée particulière se décompose en :

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})f$ est la dérivée convective de f qui indique un caractère non uniforme de f .

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est la dérivée locale de f qui indique un caractère non permanent de f .

De la même manière : **la Dérivée particulière d'une fonction vectorielle \vec{g}** :

$$\frac{D\vec{g}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{g} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{g}$$

Cette dérivée particulière se décompose aussi en :

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{g}$ est la dérivée convective de \vec{g} qui indique un caractère non uniforme de \vec{g} .

$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$ est la dérivée locale de \vec{g} qui indique un caractère non permanent de \vec{g} .

Remarque :

Le champ d'accélération du fluide se déduit donc du champ de vitesse par la dérivée particulière :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$ est la dérivée convective de la vitesse \vec{v} qui indique un caractère non uniforme de la vitesse.

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est la dérivée locale de la vitesse \vec{v} qui indique un caractère non permanent de cette vitesse.

L'accélération $\vec{a}(\vec{r}, t)$ de la particule fluide tient ainsi compte :

- Du caractère non uniforme du champ des vitesses.
- Du caractère non permanent de ce champ.

On pourra vérifier que :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

3. Equation de continuité ou de conservation de la masse dans un milieu

sans sources:

Soit une particule fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S_f de volume V , soit \overrightarrow{dS} un vecteur élémentaire de cette surface S_f .

Supposons qu'il n'existe aucune source (de masse) dans ce volume :

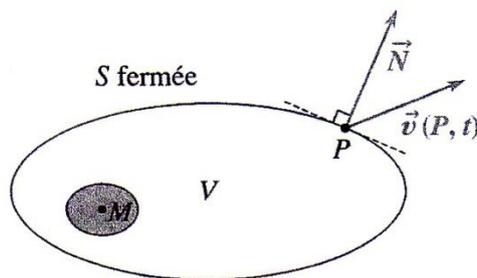
La masse de fluide $m(t)$ contenue à tout instant dans ce volume V s'écrit :

$$m(t) = \iiint_V \rho(M, t) dV$$

Du fluide entre et sort continuellement de ce volume V en traversant la surface S_f qui le limite.

Pour un volume élémentaire dV , contenant la masse $dm = \rho(M, t)dV$, la variation de la masse $m(t)$ pendant le temps dt est telle que :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dV$$



La surface fermée S_f délimite un volume V , la normale est orientée vers l'extérieur

Cette variation de masse correspond à la masse de fluide qui a traversé la surface S_f de l'extérieur vers l'intérieur pendant le temps dt , qui s'exprime sous la forme :

$$\frac{dm(t)}{dt} = - \oiint_{S_f} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) \overrightarrow{dS}$$

Ce qui nous donne une équation intégrale de conservation de la masse :

$$\iiint_{\text{volume } V} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dV + \oiint_{S_f} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) \overrightarrow{dS} = 0$$

Avec $\overrightarrow{dS} = dS \vec{n}$; \vec{n} étant la normale à la surface fermée orientée vers l'extérieur.

Compte tenu du théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{S_f} \rho(P, t) \vec{v}(P, t) \overrightarrow{dS} = \iiint_V \text{div} (\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) dV$$

L'équation locale de la conservation de la masse dans un milieu sans source s'écrira :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div} (\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) dV = 0 \Rightarrow \\ \iiint_V \left[\text{div} (\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} \right] dV = 0 \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée quelque soit le volume V, nous en déduisons une relation locale, c'est-à-dire vérifiée en tout point M du fluide.

$$\text{div} (\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$$

Ou

$\text{div} \vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0$ où $\vec{j}(M, t)$: vecteur densité volumique de courant.

Avec : $\vec{j}(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t)$

Donc :

$$\mathbf{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Cette équation peut-être donnée sous une autre forme :

Sachant que : $\text{div} (\rho \vec{v}) = \rho \text{div} \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot \vec{v}$

On aura : $\rho \text{div} \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$

(Equation locale de conservation de la masse dans un milieu sans source).

Avec : $\frac{D\rho}{Dt} = \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ (Dérivée particulaire)

Remarques :

- **Dans le cas d'un écoulement incompressible**, la masse volumique ρ d'une particule fluide se conserve au cours de son évolution.

En appliquant l'équation de conservation de la masse: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$

$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$, la masse volumique est constante localement.

Champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0 \text{ (Ostrogradski)}$$

- **En régime stationnaire (permanent) indépendant du temps :**

En appliquant l'équation de conservation de la masse: $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) $\Rightarrow \rho(M, t) = \rho(M) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0 \text{ (Ostrogradski)}$$

4. Champ de vitesse d'un fluide :

Au cours du mouvement, une particule de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Nous considérons deux points voisins d'un même fluide $M(x, y, z)$ et $M'(x+h, y+k, z+l)$ et leurs vitesses respectives. Soient $\vec{v}(M)$ et $\vec{v}'(M')$ à un instant t .

$$v'_x = v_x(x+h, y+k, z+l) = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} h + \frac{\partial v_x}{\partial y} k + \frac{\partial v_x}{\partial z} l$$

$$v'_y = v_y(x+h, y+k, z+l) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} h + \frac{\partial v_y}{\partial y} k + \frac{\partial v_y}{\partial z} l$$

$$v'_z = v_z(x+h, y+k, z+l) = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} h + \frac{\partial v_z}{\partial y} k + \frac{\partial v_z}{\partial z} l$$

Ces expressions peuvent être écrites :

$$v'_x = v_x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) l - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k \right] + d_x \quad \text{où} \quad d_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) l$$

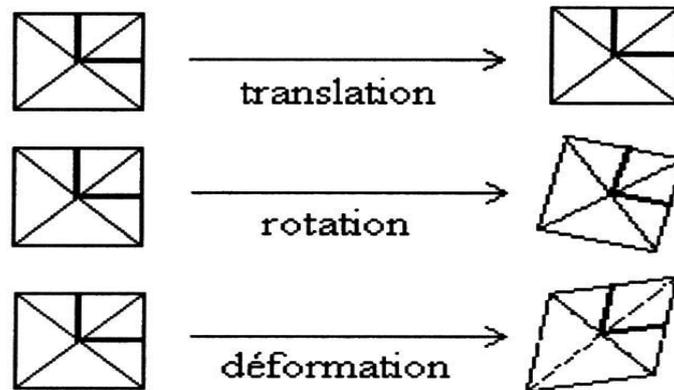
$$v'_y = v_y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) h - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) l \right] + d_y \quad \text{où} \quad d_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) h + \frac{\partial v_y}{\partial y} k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) l$$

$$v'_z = v_z + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) k - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) h \right] + d_z \quad \text{où} \quad d_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) k + \frac{\partial v_z}{\partial z} l$$

$$\text{Soit : } \vec{v}'(M') = \vec{v}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overline{MM'} + \vec{D}$$

où $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est le vecteur tourbillon et $\vec{D} = d_x \vec{e}_x + d_y \vec{e}_y + d_z \vec{e}_z$ est la vitesse de déformation.

D'une manière générale, le mouvement d'une particule fluide est la superposition d'une translation, d'une rotation et d'une déformation.



Mouvement d'une particule fluide

5. Etude de différents types de champ de vitesse:

a) Notion de circulation :

Par définition, la circulation du vecteur vitesse suivant une courbe est égale à

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

Pour une courbe fermée, et d'après Stokes :

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Où S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour fermé (C) .

b) Caractérisation de divers écoulements :

- Écoulement irrotationnel (non tourbillonnaire) ou potentiel :

L'écoulement est **irrotationnel** si : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{rot} \vec{v} = 2 \vec{\Omega} = \vec{0}$

Cette propriété a pour conséquence $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi$: le vecteur vitesse \vec{v} dérive d'une fonction potentiel φ . L'écoulement est dit **écoulement potentiel**.

\vec{v} est orthogonale aux surfaces équipotentielles = Cte .

La circulation du champ de vitesse est:

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{(C)} \overrightarrow{grad} \varphi \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Donc, la circulation du vecteur vitesse est indépendante du chemin suivi pour un écoulement potentiel.

On en déduit donc que la circulation du champ de vitesse le long d'un contour fermé (C) est nulle.

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^A d\varphi = \varphi(A) - \varphi(A) = 0$$

Ou $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$ d'après Stokes.

En introduisant l'équation de conservation de la masse

$$div(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

on obtient :

$$div(\rho \overrightarrow{grad} \varphi) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si, de plus, le fluide est **incompressible** ($\rho = Cst$), on obtient :

$$div(\rho \overrightarrow{grad} \varphi) = 0 \Rightarrow div(\overrightarrow{grad} \varphi) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$$

Donc : φ obéit à l'équation dite de Laplace: $\Delta \varphi = 0$

Remarque (analogie électrostatique) :

Champ de vitesse d'un fluide en écoulement potentiel (non tourbillonnaire) et incompressible :

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \text{il existe } \varphi \text{ tel que } \vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi$$

$$div \vec{v} = 0, \quad \text{soit } \Delta \varphi = 0$$

\vec{v} est orthogonale aux surfaces équipotentielles $\varphi = Cte$

Champ électrostatique dans une région vide de charges :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \text{il existe } V \text{ tel que } \vec{E} = \overrightarrow{grad} V$$

$$div \vec{E} = 0, \quad \text{soit } \Delta V = 0$$

\vec{E} est orthogonal aux surfaces $V = Cte$

- Écoulements rotationnels: théorie tourbillonnaire :

Dans ce type d'écoulements, $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{rot} \vec{v} = 2\overrightarrow{\Omega} \neq \vec{0}$

Pour une courbe fermée, et d'après Stokes : $\Gamma = \oint_{(C)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = 2 \iint_S \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{dS}$

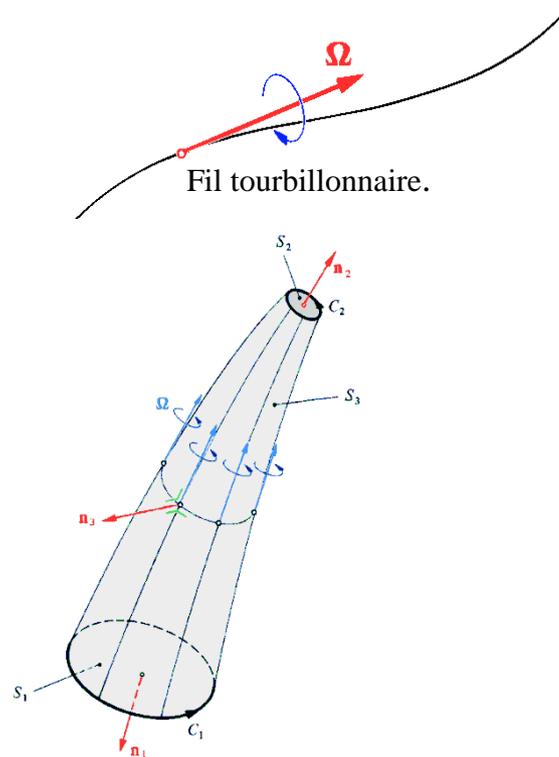
où S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour (C) fermé.

La quantité $I = \Gamma$ est appelée intensité du tourbillon.

On appelle ligne tourbillon, une ligne tangente en chaque point au vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ en ce point.

Filet tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur une courbe fermée infiniment petite.

Le vortex est le cas particulier d'un filet tourbillon unique d'intensité finie.



Tube tourbillonnaire engendré par des lignes tourbillonnaires.

Remarque : (Analogie magnétostatique):

Champ de vitesses d'un fluide en écoulement incompressible et tourbillonnaire :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\text{rot}} \vec{v} = 2 \vec{\Omega}$$

Champ magnétostatique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- Écoulement potentiel avec circulation :

Dans de nombreux cas, l'écoulement est irrotationnel dans tout l'espace sauf en un certain nombre de points singuliers pour lesquels le vecteur tourbillon est différent de zéro. Ces points se groupent suivant un certain nombre de filets tourbillons distincts.

De tels écoulements sont dits : écoulements à potentiel des vitesses avec circulation.

Exercices d'application:

Exercice 1 :

Les composantes de la vitesse d'un écoulement sont : $v_x = 10$; $v_y = x^2 + y^2$; $v_z = -2yz$
Calculer les composantes de l'accélération au point $(x = 3 ; y = 1 ; z = 5)$

Solution :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 0 + (x^2 + y^2) \cdot 0 + (-2yz) \cdot 0 \\ 10 \cdot 2x + (x^2 + y^2) \cdot 2y + (-2yz) \cdot 0 \\ 10 \cdot 0 + (x^2 + y^2) \cdot (-2z) + (-2yz) \cdot (-2y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 20x + 2x^2y + 2y^3 \\ -2x^2z + 2y^2z \end{pmatrix}$$

Au point $(x=3, y=1, z=5)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 + 18 + 2 = 80 \\ -90 + 10 = -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ -80 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{a} = 80 \vec{j} - 80 \vec{k}$$

Exercice 2 :

On considère un écoulement permanent, défini dans un repère (O, x, y, z) par le champ des vitesses suivant : $v_x = 2x - 3y$, $v_y = 3x - 2y$, $v_z = 0$

- 1) Montrer que le fluide est incompressible
- 2) Déterminer la forme des lignes de courant
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur tourbillon.

Solution :

1) $v_x = 2x - 3y$, $v_y = 3x - 2y$, $v_z = 0$

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$$

Donc $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow$ fluide incompressible

2) La forme des lignes de courant :

Il s'agit de résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{2x-3y} = \frac{dy}{3x-2y} \Rightarrow (3x-2y)dx = (2x-3y)dy$$

$$(3x-2y)dx - (2x-3y)dy = 0$$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$\frac{3}{2}x^2 - 2yx - 2xy + \frac{3}{2}y^2 = Cste, \text{ on aura donc } \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 4xy = Cste$$

La forme est elliptique.

3) Vecteur tourbillon :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{V} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] = \frac{1}{2} [(3 + 3)] \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \vec{k} = 3 \vec{k}$$

Exercice n°3 : Le cyclone : Écoulement rotationnel de l'air atmosphérique.

Un cyclone est modélisé par l'écoulement parfait rotationnel de l'air (fluide supposé parfait et incompressible) de masse volumique ρ , en mouvement stationnaire à l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz (de vecteur unitaire \vec{u}_z) et de rayon R ; cet écoulement est caractérisé par le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{u}_z$, $\Omega = Cte$. À l'extérieur de ce cyclone, le mouvement de l'air est irrotationnel. On utilisera les coordonnées cylindriques r, θ, z et la base orthonormée. $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$

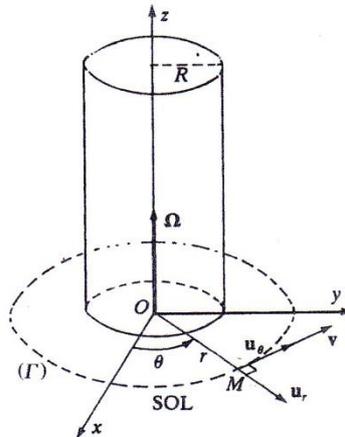
En admettant que les lignes de courant sont des cercles centrés sur l'axe Oz

1. Déterminer le champ des vitesses $v(r)$ en tout point $M(r, \theta, z)$ du fluide :

En distinguer deux cas $r \leq R$ et $r > R$. Tracer le graphe $v(r)$ et noter la vitesse maximale v_{max} .

2. Déterminer, à l'extérieur de (c), le potentiel scalaire ϕ des vitesses en $M(r, \theta)$ ainsi que la nature des surfaces équipotentielles.

Solution :



1. Le champ de vitesse $\vec{v}(r)$ en tout point $M(r, \theta, z)$ du fluide :

D'après le théorème de Stokes, la circulation du champ des vitesse \vec{v} le long d'une ligne de courant (Γ) circulaire fermée, de rayon r , est égale au flux de $\text{rot } \vec{v}$ à travers une surface Σ fermée qui s'appuie sur le contour (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{s}$$

Car la vorticité $\text{rot } \vec{v}$ vaut : $2\vec{\Omega}$

puisque \vec{v} est orthoradial (tangent aux lignes de courant circulaire), la relation devient :

- si M est intérieur à (c) , donc à l'intérieur de l' il de cyclone ($r \leq R$)

$$v_{\text{int}}(r) \cdot 2\pi r = 2\Omega \pi r^2 \quad \text{Soit } \vec{v}_{\text{int}}(r) = \Omega r \vec{u}_{\theta}$$

- si M est extérieur à (c) , donc à l'extérieur de l' il du cyclone ($r > R$) :

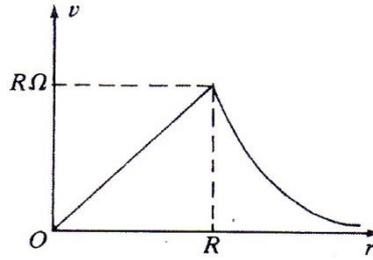
$$v_{\text{ext}}(r) \cdot 2\pi = 2\Omega \pi R^2 + 0. \quad \text{Soit } \vec{v}_{\text{ext}}(r) = \frac{\Omega R^2}{r} \vec{u}_{\theta}$$

Le graphe $v(r)$ se compose donc d'une droite passant par l'origine et d'une hyperbole qui se raccorde à la droite.

La vitesse est maximale sur la périphérie de l' il du cyclone ($r = R$),

soit :

$$v_{\text{max}} = R\Omega$$



2. A l'extérieur de (c), le champ des vitesses du fluide dérive du potentiel scalaire φ tel que :

$$\vec{v}_{ext} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \Rightarrow \text{donc : } (v_{\theta})_{ext} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Omega R^2}{r}$$

Donc, par intégration, à une constante additive près :

$$\varphi = -\Omega R^2 \theta$$

Les équipotentiels (normales aux lignes de champ) sont définies par $d\varphi = 0$ ou $\varphi = \text{Cte}$, soit $\theta = \text{Cte}$; les surfaces équipotentiels sont donc des plans contenant l'axe Oz .

Exercice 4 : Écoulement plan rotationnel de l'atmosphère : composition des vitesses :

On considère les mouvements plans de l'air atmosphérique: dans ce modèle, toutes les lignes de courant sont des courbes planes situées dans des plans horizontaux parallèles à xOy et sur toute droite normale à cette famille de plan règne en tout point le même état d'écoulement.

On désignera $v(v_x, v_y, 0)$ le champ local des vitesses de cet écoulement plan, à l'instant t , au point M de coordonnées (x, y, z) repéré dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ du référentiel orthonormé $xOyz$.

- 1) Déterminer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ en M à l'instant t
- 2) Calculer les composantes du champ de vitesse en M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$)

$$\vec{v}_1 = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

En déduire la nature des lignes de courant et des surfaces équipotentiels.

- 3) Calculer les composantes du champ de vitesse en M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$)

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \vec{r} (\text{div } \vec{v})$$

En déduire la nature des lignes de courant et des surfaces équipotentiels

Solution :

1) Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ en M , a l'instant t :

$$\vec{\Omega}(M, t) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(M, t) = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$\text{Soit } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{\Omega}(M, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

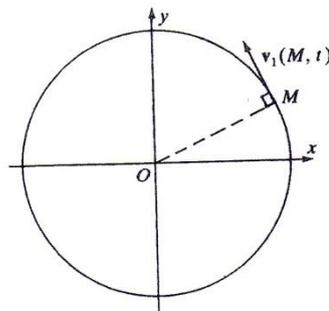
2) Le champ de vitesse $\vec{v}_1 = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ en M a pour composantes.

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega y \\ +\Omega x \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{ou} \quad \vec{v}_1 \begin{cases} v_{1x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) y \\ v_{1y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) x \\ v_{1z} = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont telles que le déplacement élémentaire $d\vec{r}(dx, dy, 0)$ est parallèle à la vitesse $\vec{v}_1(v_{1x}, v_{1y}, 0)$ en chaque point, soit :

$$\frac{dx}{v_{1x}} = \frac{dy}{v_{1y}} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x}, \quad \text{soit} \quad xdx + ydy = 0$$

Donc par intégration: $x^2 + y^2 = \text{Cste}$, les lignes de courant de champ \vec{v}_1 sont des cercles concentrique de centre O dans le plan xOy



les équipotentiels du champ de vitesse \vec{v}_1 , normales aux lignes de courant, sont donc les droites radiales (passant par O).

3) Le champ de vitesse $\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \vec{r} (\text{div } \vec{v})$ a pour composantes en $M(x, y, z)$ à l'instant t :

comme $\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Rightarrow \vec{v}_2$ devient:

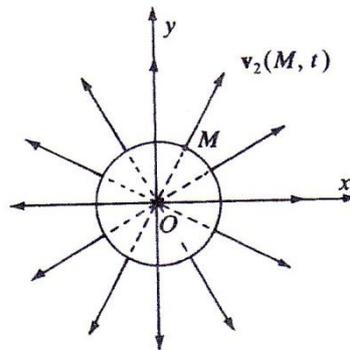
$$\vec{v}_2 \begin{cases} v_{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) x \\ v_{2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) y \\ v_{2z} = 0 \end{cases}$$

Nature des lignes de courant : les lignes de courant du champ \vec{V}_2 sont telles que :

$$\frac{dx}{v_{2x}} = \frac{dy}{v_{2y}} \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Donc $y = kx$ ($k = \text{Cte}$)

Ce sont des **droites** passant par O , situées dans des plans parallèles à xOy



Les équipotentiels du champ de vitesse \vec{V}_2 , normales aux lignes de courant, sont donc des **cercles concentriques** de centre O .

Les lignes de courant horizontales et radiales fuient le centre O si $\text{div } \vec{v} > 0$ et convergent vers le centre O si $\text{div } \vec{v} < 0$; donc :

* si $\text{div } \vec{v} > 0$, les particules de fluide **divergent** à partir de O , le vide créé autour de O entraîne un appel d'air vertical descendant, donc il y a **refroidissement** de l'atmosphère.

* si $\text{div } \vec{v} < 0$, les particules de fluide **convergent** vers O en chassant une partie du fluide animé alors d'un mouvement vertical ascendant, donc il y a **réchauffement** de l'atmosphère.

Exercice 5 : Lignes de courant et accélération d'un écoulement plan :

Pour cette application on étudie deux écoulements plans stationnaires d'un fluide parfait, notés (E_1) et (E_2) , dont les champs de vitesse locale au point $M(x, y, z)$ sont respectivement :

$$\vec{v}_1 \begin{cases} v_x = 3xy^2 \\ v_y = -3x^2y \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 \begin{cases} v_x = 3x^2y \\ v_y = -3xy^2 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide pour chacun des deux écoulements (E_1) et (E_2) :
- 2) Calculer l'accélération \vec{a} de la particule du fluide de l'écoulement (E_2) en utilisant une description eulérienne.

Solution :

- 1) Pour chacun des deux écoulements (E_1) et (E_2) , les lignes de courant (ou lignes de champ) confondues avec la trajectoire des particules du fluide (car les écoulements étudiés sont stationnaires) sont telles que le déplacement élémentaire \vec{dr} ($dx, dy, 0$) d'une particule fluide est parallèle à la vitesse d'écoulement \vec{v} ($v_x, v_y, 0$) du fluide au point $(x, y, 0)$

Donc,
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

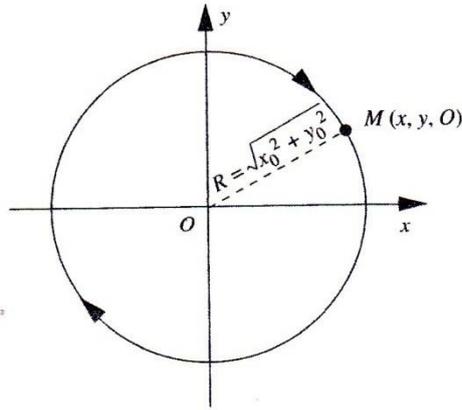
Pour l'écoulement (E_1) on a donc :
$$\frac{dx}{3xy^2} = -\frac{dy}{3x^2y}$$
 ; on en déduit

$$\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad xdx + ydy = 0 \quad \text{soit,}$$

Par intégration,
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = Cte$$

et donc :
$$x^2 + y^2 = Cte = x_0^2 + y_0^2$$

Les lignes de courants des écoulement (E_1) sont des **cercles**, dans le plan xOy , de centre **O** origine du repère cartésien $Oxyz$ et de rayon. $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$



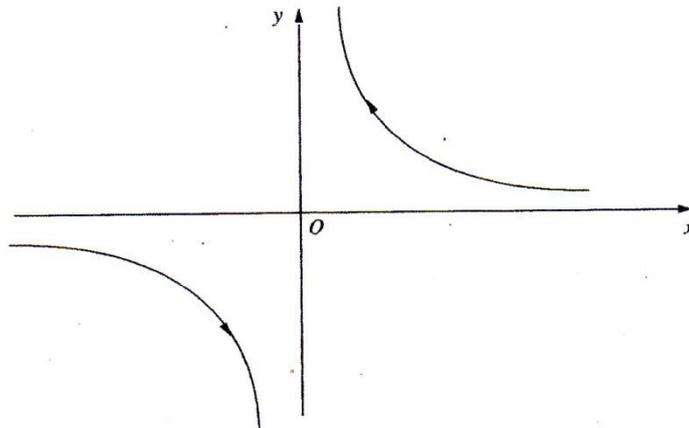
Lignes de courant circulaires de l'écoulement (E_1)

Pour l'écoulement (E_2), on a de même : $-\frac{dx}{3x^2 y} = \frac{dy}{3xy^2}$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$; soit $\ln(x \cdot y) = Cte$

$$x \cdot y = Cte = x_0 \cdot y_0$$

Les lignes de courant des écoulements (E_2) sont donc des **hyperboles équilatères** de centre **O**



Lignes de courant hyperbolique de l'écoulement (E_2)

$$2) \vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{On a: } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \left[v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Avec: $(v_x = -3x^2y, v_y = 3xy^2, v_z = 0)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9x^3y^2 \\ 9x^2y^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Écoulement potentiel d'une source rectiligne à symétrie cylindrique :

Une source « rectiligne » de longueur infinie, dirigée suivant l'axe vertical Oz , émet un fluide de façon isotrope dans l'espace.

Le champ des vitesses d'écoulement, en tout point M ($\overline{OM} = \vec{r}$) repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ est radial.

$$\vec{v} = \frac{k}{r} \vec{u}_r$$

Où k est une constante positive, fonction du débit de la source.

3) Montrer que cet écoulement est incompressible et irrotationnel.

4) Calculer le potentiel $\varphi(r)$ des vitesses. Tracer l'allure des lignes de courant et des surfaces équipotentielles.

Solution :

1) Le champ de vitesses radial

$$\vec{v} = \frac{k}{r} \vec{u}_r \text{ est tel que : } \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$\text{Car : } rv = k = \text{Cte}$$

Le fluide est donc en écoulement incompressible car : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

Puisque le champ des vitesses est radial et indépendant de θ et z , on a :

$$\overline{\operatorname{rot}} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{u}_z = 0 \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$\overline{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ le fluide est donc animé d'un mouvement irrotationnel.

2) Au champ des vitesses $\vec{v} = \frac{k}{r} \vec{u}_r$, on associe le potentiel $\varphi(r)$ défini par :

$$\vec{v} = -\overline{\operatorname{grad}} \varphi \text{ car } \overline{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0} .$$

$$\text{Donc : } \vec{v} = (v_r = \frac{k}{r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = 0 = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, \quad v_z = 0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z})$$

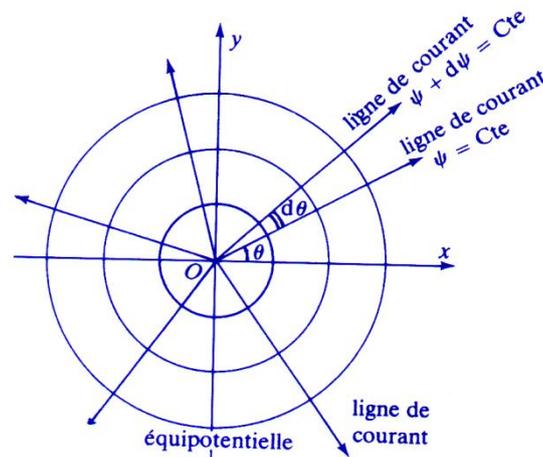
Le potentiel φ est donc indépendant de θ et z , soit :

$$\frac{k}{r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{ou} \quad d\varphi = -k \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = -k \ln r + \text{Cte}$$

Les lignes de courant définies par $\vec{v} // \vec{dr}$ sont évidemment les droites radiales issues de O .

Les surfaces équipotentiellles définies par $\varphi = Cte$ ou $r = Cte$ sont donc des cylindres d'axe Oz , leur trace dans le plan $z=0$ sont donc des cercles concentriques.

Remarque : les équipotentiellles sont normales aux lignes de courant.



Exercice 7 :

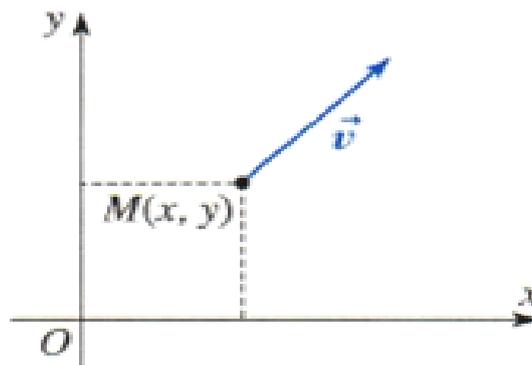
Le champ Eulérien de vitesse d'un écoulement bidimensionnel est donné par (coordonnées cartésiennes) : $\vec{V} = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0)$.

On s'intéresse aux écoulements suivants :

Cas A : $\vec{V} = (kx, ky, 0)$.

Cas B : $\vec{V} = (ky, kx, 0)$.

Cas C : $\vec{V} = (-ky, kx, 0)$.



Pour chaque cas caractériser l'écoulement (compressible? Tourbillonnaire?), existe-t-il un potentiel des vitesses pour chaque cas, déterminer :

1. L'équation des lignes de courant, des trajectoires. Commenter ?
2. L'accélération d'une particule de fluide.

Solution :

Cas A :

1) L'écoulement est stationnaire, car le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = k + k = 2k \neq 0$$

Écoulement est compressible

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k}] = \vec{0}$$

Écoulement irrotationnel

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$$

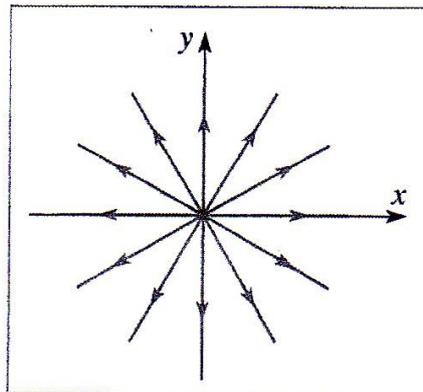
$$\begin{cases} v_x = kx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y = ky = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) + Cte$$

Les lignes de courant s'obtiennent par intégration de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{kx} = \frac{dy}{ky} \Rightarrow x = Ay$$

Ce sont des droites radiales passant par le point $(x=0, y=0)$

En régime stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont identiques.



2) L'accélération par la méthode d'Euler :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 x \\ k^2 y \end{bmatrix}$$

B)

1) L'écoulement est stationnaire, car le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 + 0 = 0$$

Écoulement est incompressible

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (k - k)\vec{k}] = \vec{0}$$

Écoulement irrotationnel

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$$

$$\begin{cases} v_x = ky = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y = kx = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = kxy + \text{Cte}$$

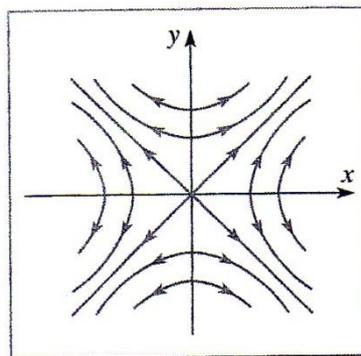
Les lignes de courant s'obtiennent par intégration de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{ky} = \frac{dy}{kx} \Rightarrow x^2 - y^2 = A$$

Si $A \neq 0$, Ce sont des hyperboles

Si $A = 0$ $y = \pm x$, on obtient deux droites.

En régime stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont identiques.



2) L'accélération par la méthode d'Euler :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 x \\ k^2 y \end{bmatrix}$$

C)

1) L'écoulement est stationnaire, car le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 + 0 = 0$$

Écoulement est incompressible

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [(0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (k - (-k))\vec{k}] = k \vec{k}$$

Écoulement rotationnel

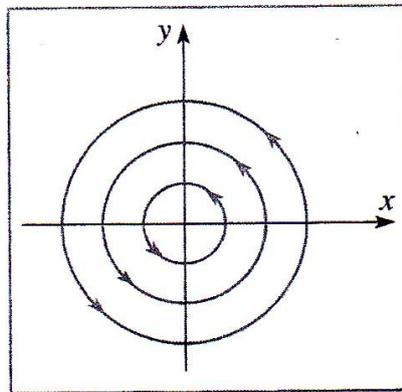
On ne peut pas définir de potentiel des vitesses

Les lignes de courant s'obtiennent par intégration de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \Rightarrow x^2 + y^2 = A$$

Ce sont des cercles centrés en O

En régime stationnaire, les trajectoires et les lignes de courant sont identiques.



2) L'accélération par la méthode d'Euler :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k^2 x \\ -k^2 y \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Phénomènes de surface

1. Introduction: L'interface liquide pur-gaz :

Un liquide a tendance à prendre une forme lui donnant la plus faible surface, ce sont les phénomènes de cohésion qui tendent à minimiser la surface libre d'un liquide, cette cohésion des liquides est due aux forces d'attraction interatomiques ou intermoléculaires ; cette surface libre du liquide semble se comporter comme une membrane élastique tendue, il existe donc un phénomène de tension superficielle.

Exemple : (insectes marchant sur l'eau).

2. Tension superficielle :

a) Expérience :

Considérons un fil métallique rigide en U fermé par un fil rigide de longueur l pouvant coulisser sur le fil en U.

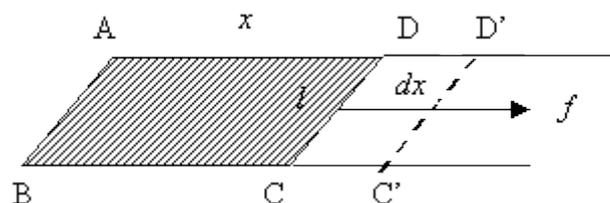
Prenons de l'eau savonneuse, on forme ainsi un film de surface S délimité par cette armature.

b) Expression de la force de tension superficielle.

Pour maintenir le fil de longueur l immobile, il faut exercer une force \vec{f} sur CD, ce qui montre que le film exerce une force égale et opposée à \vec{f} qui est la force de tension superficielle.

On remarque que cette force de tension superficielle est proportionnelle à la longueur de la tige coulissante.

Le film présente deux surface air-liquide donc on exprimera cette force par : $f = 2\sigma l$ où σ représente le coefficient de tension superficielle du liquide utilisé. C'est la force par unité de longueur.



Une lame liquide étirée

3. Travail de surface – Energie libre de surface :

Dans l'exemple de l'expérience précédente pour déplacer la tige d'une quantité Δx , il faut fournir un travail $\Delta W = f \cdot \Delta x$

On écrira alors $\Delta W = 2\sigma l \Delta x = \sigma \Delta S$

Avec $\Delta S = 2l\Delta x$ comme étant la variation de la surface du film.

La tension superficielle peut donc aussi être exprimée par une variation d'énergie due à une augmentation de surface.

Le coefficient de tension superficielle peut-être exprimée par :

$$\sigma = \frac{f}{2l} \left(\text{N/m} \right) \text{ ou } \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \left(\text{J/m}^2 \right)$$

Matériau	Température	Tension superficielle(mN/m)
Eau	20°C	72,8
Alcanes	20°C	17,5 à 22,5
Benzène	20°C	28,5
Toluène	20°C	28
Alcools gras	20°C	22 à 25
Glycol	20°C	46
Glycérine	20°C	63
Sulfure de carbone	20°C	33
Hydrogène	(- 253°C)	2,13
Azote	(- 196°C)	8,5
Chlore	(- 72°C)	34
Étain	(230°C)	523
Plomb	(335°C)	450
Mercure	(15°C)	480

Quelques valeurs de tension superficielle de quelques liquides.

Remarque : L'eau pure a une tension superficielle hors du commun (2,5 à 3 fois plus élevée que les autres produits).

4. Effet de la température sur la tension superficielle :

σ dépend de la température, il décroît quand la température augmente.

Liquide	0°C	20°C	40°C	60°C	80°C	100°C
Eau	75,64	72,75	69,56	66,18	62,61	58,85
Benzène	31,60	28,90	26,30	23,70	21,30	
Toluène	30,74	28,43	26,13	23,81	21,53	19,39
Tétrachlorure de carbone		26,80	24,30	21,90		
Méthanol	24,50	22,65	20,90			15,70
Éthanol	24,05	22,27	20,60	19,01		
Acétone	26,21	23,70	21,16	18,60	16,20	

σ est donné en mN/m ou mJ/m²

Tensions superficielles de quelques liquides purs à différentes températures.

5. Equation de Laplace :

Soit une goutte sphérique d'un liquide de rayon R , son énergie libre de surface est : $E = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2$

Supposons une augmentation de son rayon de dR , son énergie libre de surface est alors augmentée de $dE = \sigma \cdot 8\pi R dR$

Ce qui est équilibré par une augmentation de pression Δp (surpression)

$$dE = \sigma ds = \Delta p dV \Rightarrow \sigma 8\pi R dR = \Delta p dV$$

$$\text{Avec } dV = 4\pi R^2 dR, \text{ il vient : } \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

Remarques :

La pression à l'intérieur d'une goutte est d'autant plus importante que son rayon est petit.

Dans le cas d'une bulle de savon, il faut tenir compte de la face intérieure et extérieure de la bulle ce qui double la surface et l'énergie de surface ;

la surpression devient :

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$$

Pour un élément de surface courbe quelconque caractérisé par deux rayons de courbure R_1 et R_2

$$\Delta p = \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

6. L'interface liquide-solide: Le phénomène de mouillage :

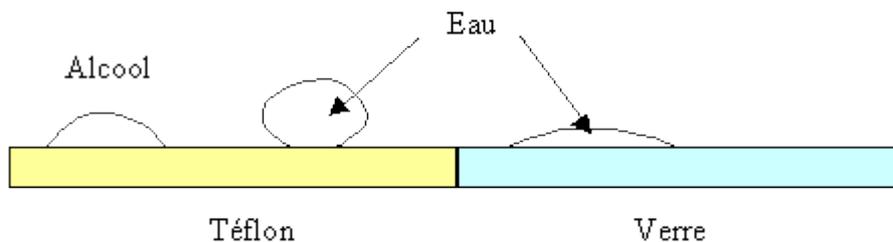
a) Mise en évidence expérimentale

Sur une plaque de Téflon déposons une goutte d'eau et une goutte d'alcool.

Leurs profils ne sont pas les mêmes :

L'alcool s'étale d'avantage, on dit qu'il mouille plus le Téflon.

Une goutte d'eau s'étale d'avantage sur une plaque de verre que sur du Téflon, on dit que l'eau mouille d'avantage le verre que le Téflon.

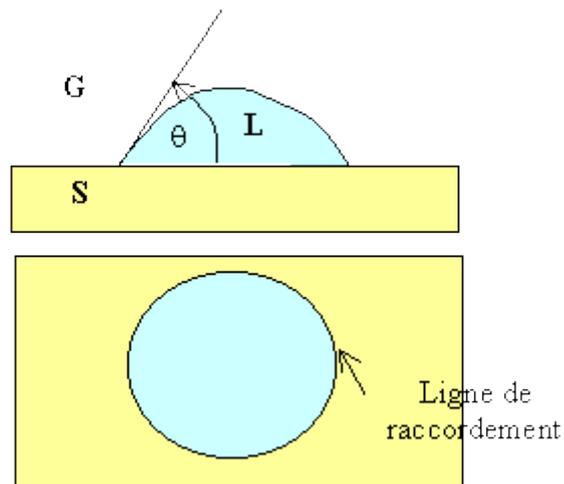


Selon la nature du solide et du liquide, les phénomènes observés sont différents

b) Ligne et angle de raccordement – Mouillage

Les gouttes formées sont en équilibre sur la surface solide. Parfois cet équilibre est impossible et la goutte s'étale complètement : on parle alors de mouillage parfait.

Mesures à l'équilibre



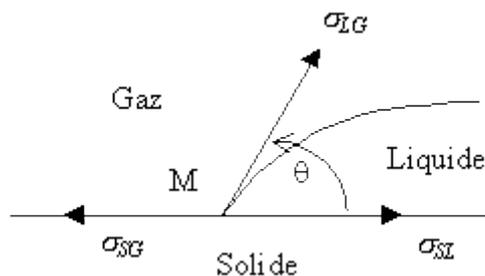
Cette situation fait intervenir trois phases : liquide, solide, gaz (air).

L'angle de raccordement θ peut facilement, mais imparfaitement, être mesuré.

Nous pouvons distinguer quatre cas de figures :

- L'angle est nul Le liquide est parfaitement mouillant pour la surface
- L'angle est inférieur à 90° Le liquide mouille imparfaitement la surface
- L'angle est supérieur à 90° Le liquide est imparfaitement non mouillant.
- L'angle vaut 180° Le liquide est parfaitement non mouillant.

c) Conditions d'équilibre de la ligne de contact entre trois phases.



Mouillage d'une goutte

Considérons trois phases en équilibre ; l'intersection des trois interfaces s'appelle la ligne de contact entre les trois phases.

Dans le cas d'une goutte liquide (L) étalée sur une surface plane solide (S) dans une atmosphère gazeuse (G), les directions des tensions interfaciales σ_{SL} et σ_{SG} sont alignées sur la tangente au point M à la surface du solide.

Exprimons l'immobilité de la ligne de raccordement où se rencontrent les trois phases S, L et G pour un élément dl de la ligne triple.

$$\sigma_{SG} \vec{dl} + \sigma_{SL} \vec{dl} + \sigma_{LG} \vec{dl} = \vec{0}$$

En projetant dans le plan de la plaque, l'équilibre du liquide à la surface du solide s'exprime par la condition de Young :

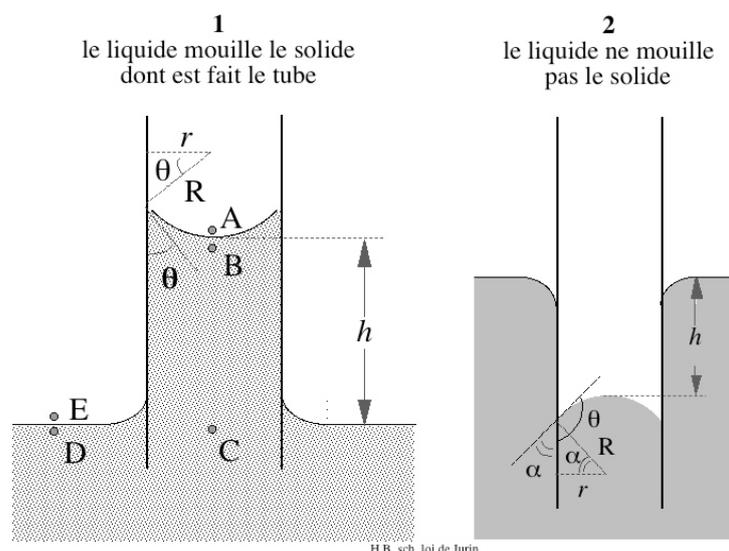
$$\sigma_{SG} = \sigma_{SL} + \sigma_{LG} \cos\theta$$

Cette loi permet de faire des prévisions. En effet, si l'on connaît deux valeurs et un angle, la troisième valeur peut être connue.

Pour l'équilibre eau/Téflon, nous relevons dans des tables :

Avec $\sigma_{SG} = \sigma_{\text{Téflon/air}} = 19 \text{ mJ/m}^2$; $\sigma_{LG} = \sigma_{\text{eau/air}} = 73 \text{ mJ/m}^2$; $\sigma_{SL} = \sigma_{\text{Téflon/eau}} \approx 50 \text{ mJ/m}^2$, l'angle de raccordement vaudrait $\sim 115^\circ$ si les conditions de surfaces étaient parfaites.

7. Montée capillaire: Loi de Jurin : Ascension capillaire



En première approximation, le phénomène d'ascension capillaire peut être compris en utilisant l'équation de Young et Laplace. Lorsqu'on plonge un tube cylindrique de petit diamètre dans un liquide, on observe une différence de niveau entre la colonne du liquide et le réservoir extérieur. Calculons cette différence de niveau appelée hauteur d'ascension capillaire.

Supposons que le ménisque soit formé dans un tube de rayon r et qu'il ait la forme d'une calotte sphérique de rayon R . La différence de pression qui existe entre les deux points B et A situés de part et d'autre de l'interface sphérique vaut, d'après la loi de Laplace :

$$p_A - p_B = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} \quad \text{avec: } \cos\theta = \frac{r}{R}$$

où θ représente l'angle de contact au point de raccordement des trois phases ; c'est cet angle qui a été défini par la relation de Young.

D'autre part, la différence de pression hydrostatique entre les points C, A (ou D) et B vaut :

$$p_A = p_D = p_C = p_0 = p_B + \rho_L g h \Rightarrow p_A - p_B = \rho_L g h$$

$$\rho_L g h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} \Rightarrow \sigma = \frac{\rho_L g h r}{2 \cos\theta} \quad \text{ou } h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho_L g r}$$

Cette relation constitue **la loi de Jurin**.

La hauteur d'ascension capillaire sera donc maximale pour $\theta = 0$:

ce qui est le cas d'un liquide parfaitement mouillant. Elle sera nulle pour un angle de mouillage de 90° et minimale (valeur négative) pour un liquide parfaitement non mouillant ($\theta = 180^\circ$).

Exercices d'application :

Exercice 1 :

La pression à l'extérieure d'une bulle de savon de rayon r est initialement égale à la moitié de la pression intérieure p_i .

On réduit la pression extérieure jusqu'à une valeur nulle.

Trouver la nouvelle pression intérieure et le nouveau rayon de la bulle.

Solution :

$$p_{\text{ext}} = \frac{p_i}{2} \Rightarrow p_i - p_{\text{ext}} = \frac{p_i}{2} = \frac{4\sigma}{r}$$

$$p_i' - 0 = \frac{4\sigma}{r'}$$

$$\Rightarrow \frac{p_i'}{p_i} = \frac{r}{2r'}$$

On applique la loi des gaz parfaits à température constante : $pV = \text{Cste}$

$$p_i' V' = p_i V \Rightarrow \frac{p_i'}{p_i} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{r}{2r'} \Rightarrow r'^2 = 2r^2 \Rightarrow r' = r\sqrt{2}$$

$$p_i' = p_i \frac{r}{2r'} = \frac{p_i}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 2 :

Un tube capillaire de verre de longueur $L=10$ cm fermé à son extrémité supérieure et rempli d'air à la pression P_0 est plongé verticalement sur la moitié de sa longueur dans un liquide dont la surface est soumise à la pression P_0 . Le liquide mouille parfaitement le verre.

On considère que l'air enfermé dans le tube capillaire se comporte comme un gaz parfait

- 1) Quelle devrait-être la valeur r du rayon interne du capillaire pour que la hauteur d'ascension du liquide dans le capillaire soit nulle ?
- 2) En réalité, le rayon interne du capillaire est $r' = 70 \mu\text{m}$. Quelle est la hauteur h d'ascension du liquide dans le tube capillaire ?

$$\sigma = 0.7 \text{ N/m}, \rho = 500 \text{ Kg.m}^{-3}, P_0 = 10^4 \text{ Pa}, g = 10 \text{ m.s}^{-2}.$$

Solution :

1) L'air enfermé se comporte comme un gaz parfait $PV = \text{Cte}$

Le tube est rempli d'air à la pression P_0

Lorsque l'ascension du liquide dans le tube est nulle, le volume d'air enfermé correspond à la moitié du volume du tube

$$P_0 V_0 = P \frac{V_0}{2} \text{ Donc } P = 2 P_0$$

Au niveau de ménisque la surpression de Laplace $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$

Avec $r = R \cdot \cos(\theta)$ (r : rayon du capillaire et R : rayon du ménisque)

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{r} \cos\theta = \frac{2\sigma}{r}, \text{ car } (\theta = 0, \text{ le liquide mouille parfaitement le verre})$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r} \text{ Avec } \Delta P = 2 P_0 - P_0 \implies P_0 = \frac{2\sigma}{r} \text{ donc } r = \frac{2\sigma}{P_0}$$

$$\text{AN : } r = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

2) Au niveau du ménisque à la hauteur h

$$\Delta P = P' - (P_0 - \rho gh) = \frac{2\sigma}{R'} = \frac{2\sigma}{r'} \cos\theta = \frac{2\sigma}{r'} \quad (\theta = \text{liquide mouille parfaitement le verre})$$

$$\text{Comme } PV = Cte \implies P' \left(\frac{L}{2} - h\right) S = P_0 \cdot L S$$

$$\implies P' = \frac{P_0 \cdot L}{\frac{L}{2} - h}$$

$$\text{Loi de Laplace : } \Delta P = \frac{2\sigma}{r'} \implies \frac{P_0 \cdot L}{\frac{L}{2} - h} - P_0 + \rho gh = \frac{2\sigma}{r'}$$

$$\implies P_0 \cdot L \cdot r' - P_0 \left(\frac{L}{2} - h\right) r' + \rho gh \left(\frac{L}{2} - h\right) r' = 2\sigma \left(\frac{L}{2} - h\right)$$

$$\implies -\rho gh^2 r' - h \left(\rho g r' \frac{L}{2} + P_0 \cdot r' + 2\sigma\right) - 2\sigma \frac{L}{2} + P_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot r' = 0$$

$$\implies -\rho gh^2 + h \left(\rho g \frac{L}{2} + P_0 + \frac{2\sigma}{r'}\right) - \frac{L\sigma}{r'} + P_0 \cdot \frac{L}{2} = 0$$

Equation de deuxième ordre en h ; donc deux solutions, mais une seule solution valable physiquement donc $h = 1.66 \text{ cm}$

Exercice n°3 :

Trouver la pression à l'intérieur d'une bulle d'air de $10\mu\text{m}$ de rayon située dans l'eau douce à une profondeur de 4.5 m . La pression atmosphérique est égale à 10^5 Pa et la tension de surface de l'eau à 0.075 N/m .

Solution :

La pression extérieure à l'intérieur d'une bulle d'air dans l'eau douce est :

$$p_{\text{ext}} = p_0 + \rho gh = 1.45 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

En utilisant la loi de Laplace :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = p_i - p_{\text{ext}} \Rightarrow p_i = p_{\text{ext}} + \frac{2\sigma}{r} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Exercice n°4 :

Une goutte de benzène est déposée sur une surface plane propre de mercure. L'expérience a lieu à 20°C . La goutte reste-t-elle en équilibre ou s'étale-t-elle sur la surface du mercure

$\sigma_{\text{air-benzène}} = 0.0285 \text{ N/m}$; $\sigma_{\text{benzène-mercure}} = 0.357 \text{ N/m}$; $\sigma_{\text{air-mercure}} = 0.473 \text{ N/m}$

Solution :

Si l'équilibre de la goutte de benzène est réalisé:

$$\begin{aligned} \sigma_{SG} &= \sigma_{SL} + \sigma_{LG} \cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LG}} = \frac{0.473 - 0.357}{0.0285} > 1 \end{aligned}$$

Donc l'équilibre de la goutte de benzène est impossible \Rightarrow le benzène s'étale en un film mince.

Chapitre 4

Dynamique des fluides parfaits

1. Equation de Navier-Stokes.

Il s'agit d'écrire l'équation fondamentale de la dynamique pour la particule fluide de masse $dm = \rho dV$, soit dans un référentiel galiléen :

$$\rho dV \vec{a} = \sum \overrightarrow{dF_{ext}} \quad \vec{a} : \text{étant l'accélération de la particule fluide}$$

Les forces extérieures par unité de volume sont de trois types :

- a) celles dues au champ de pesanteur : $\rho \vec{g} = \rho \overrightarrow{\text{grad}} (-gz)$
- b) celles dues aux forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}} p$
- c) celles de viscosité (dans le cas des fluides réels).

L'accélération se calcule à partir de la formule de dérivation.

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Soit :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \text{ est un opérateur}$$

$$\text{Donc :} \quad \rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] =$$

$$\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$$

C'est l'équation de la dynamique des fluides dite de Navier-Stokes pour un fluide newtonien.

La quantité η est appelée coefficient de viscosité dynamique pour les fluides réels

2. Equation de Navier-Stokes pour les fluides non-visqueux (fluides parfaits). ($\eta = 0$).

Pour les fluides parfaits, on néglige la viscosité. L'équation de la dynamique des fluides devient :

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

3. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli par l'équation fondamentale de la dynamique :

Soit un écoulement permanent $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, et irrotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, d'un fluide parfait.

L'équation précédente devient :

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right] = \rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

On admet que la force de pesanteur dérive d'un potentiel U, c'est-à-dire :

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} U \quad \text{avec } U = -gz$$

On aura :

$$\rho \vec{a} = \rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 \right] = \rho \overrightarrow{\text{grad}} U - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\rho \vec{a} = \rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 \right] = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} gz - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 \right] + \rho \overrightarrow{\text{grad}} gz + \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{0}$$

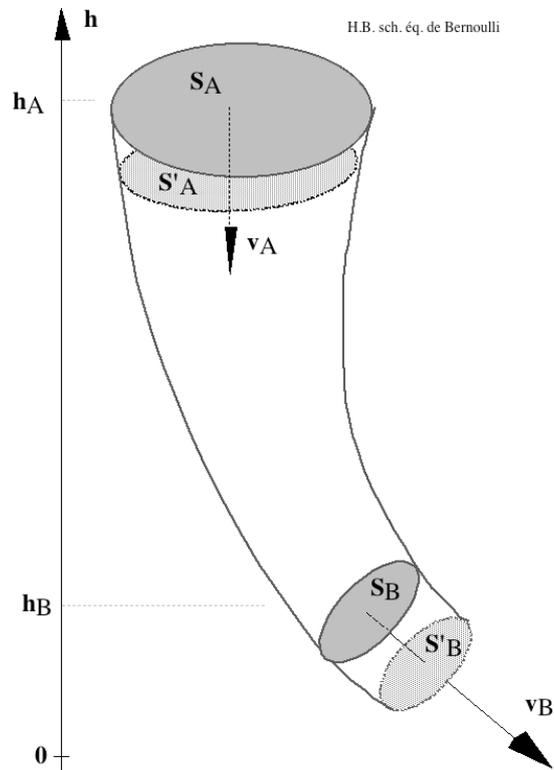
$$\rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{Constante}$$

$$\text{Ou } \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz + p = \text{Constante}$$

On obtient alors l'équation de Bernoulli.

4. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli par le théorème de l'énergie cinétique établi en mécanique :



On applique le théorème de l'énergie cinétique :

« La variation de l'énergie cinétique de la masse de fluide est égale au travail des forces intérieures et extérieures. »

Variation de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} \rho dV (v_B^2 - v_A^2)$

Travail des forces de pression : $(p_A - p_B) dV$

Travail des forces de pesanteur : $\rho g (h_A - h_B) dV$

On aura donc : $\frac{1}{2} \rho dV (v_B^2 - v_A^2) = (p_A - p_B) dV + \rho g (h_A - h_B) dV$

$\Rightarrow p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = Constante$

Donc plus généralement : $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = Constante$

On obtient l'équation de Bernoulli établie précédemment par une autre méthode.

En hydraulique on appelle charge, la quantité $\frac{p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2}{\rho g}$ exprimée en m.

Théorème de Bernoulli :

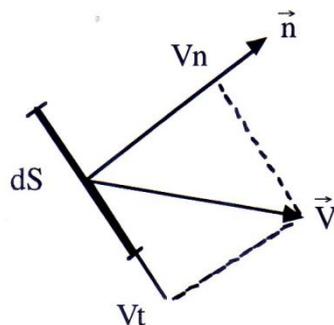
Dans un écoulement isovolume, permanent à viscosité négligeable, la charge se conserve le long d'une ligne de courant.

5. Notions de débit à travers une surface élémentaire :

On distingue le débit massique noté Q_m (Kg/s) et le débit volumique noté Q_v (m^3/s).

a) Le débit massique élémentaire à travers la surface dS :

$$dQ_m = \frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot dS \vec{n} = \rho v_n dS$$



C'est donc la composante normale de la vitesse qui fournit le débit.

Le débit massique est donc donné par $Q_m = \iint_S \frac{dm}{dt} = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$

\vec{n} étant la normale à la surface non fermée sur laquelle on mesure le débit.

Remarque : Le débit massique est donc le flux du vecteur $\rho \vec{v}$ à travers la surface S . Avec $\vec{j}_m = \rho \vec{v}$ (vecteur densité de flux de masse)

b) Le débit volumique : On peut l'exprimer par :

$$Q_v = \iint_S \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \text{ on vérifiera : } Q_m = \rho Q_v$$

Remarque : Le débit volumique étant donc le flux du vecteur vitesse \vec{v} à travers la surface S . Avec $\vec{j}_v = \vec{v}$ (vecteur densité de flux de volume)

c) Le vecteur densité de flux de masse :

On appelle vecteur densité de flux de masse le vecteur :

$$\vec{J}_m = \rho \vec{v}$$

Remarque : - Le débit massique étant donc le flux de \vec{J}_m à travers la surface S .

$$Q_m = \iint_S \vec{J}_m \cdot \vec{n} dS$$

d) Conservation de la masse en régime permanent :

En régime stationnaire (permanent) indépendant du temps sans source:

En introduisant l'équation de conservation de la masse

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow \rho(M, t) = \rho(M) \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

(champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif)

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = \oiint_S \vec{J}_m \cdot \vec{dS} = 0$$

(Ostrogradski)

Le débit massique $Q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ se conserve à travers une surface S non fermée.

Conséquence: Le vecteur $\vec{J}_m = \rho \vec{v}$ est à flux conservatif.

e) Conservation du volume : Equation de continuité :

Le champ de vitesse \vec{v} de l'**écoulement incompressible** est de divergence nulle

En utilisant la deuxième forme de l'équation de la conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\text{On a donc : } \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

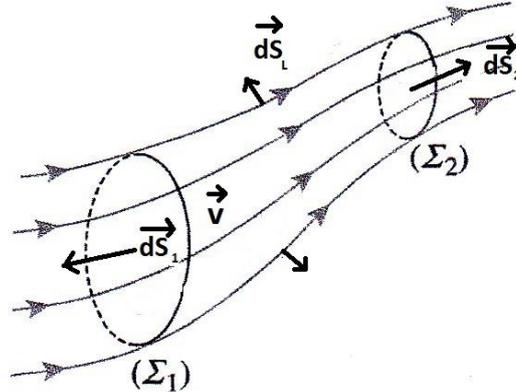
(champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif)

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0 \text{ (Ostrogradski)}$$

Conséquence : le champ de vitesse \vec{v} est à flux conservatif.

Appliquons donc cette équation $\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0$ à un tube de courant dont les parois sont parallèles à \vec{v} .

Soit Σ la surface fermée délimitant le volume V composée de $(\Sigma_2$ et $\Sigma_1)$ les surfaces des deux bases et Σ_L la surface latérale.



Tube de courant

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{dS}_2 - \iint_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{\Sigma_L} \vec{v} \cdot \vec{dS}_L = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{dS}_L = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{dS}_2 - \iint_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{dS}_1 = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot \vec{dS}_2 = \iint_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot \vec{dS}_1$$

D'une manière générale, pour un fluide incompressible, le débit volumique

$Q_V = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}$ est conservé le long d'un tube de courant.

N.B. On retrouvera donc que : $Q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$ est également conservé.

On obtiendra donc : $Q_V = S v = S v_{moy} = Cste$ avec v_{moy} (vitesse moyenne)

Entre deux sections S_1 et S_2 d'une conduite cylindrique on aura :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

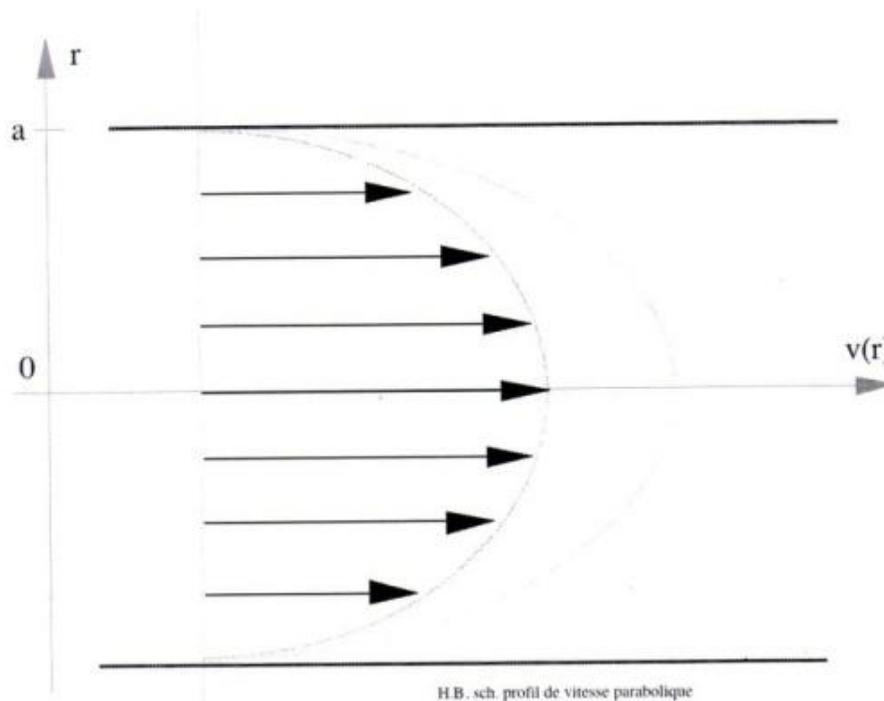
Remarque : Vitesse moyenne :

En général la vitesse \vec{v} n'est pas constante sur la section S d'un tube de courant, on dit qu'il existe un profil de vitesse. Le débit massique ou le débit volumique s'obtient en intégrant le débit élémentaire sur toute la surface.

Dans une section droite S de la canalisation on appelle vitesse moyenne :

$$Q_V = S v_{moy} \Rightarrow v_{moy} = \frac{Q_V}{S}$$

La vitesse moyenne apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assure le même débit que la répartition réelle des vitesses.



Profil de vitesse dans la section transversale d'une conduite

6. Théorème de Bernoulli généralisé: Ecoulements avec échange d'énergie :
Cas d'un écoulement avec échange d'énergie :

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un système de conduites, il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

Les pompes donneront de la puissance mécanique au fluide.

Les turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note \mathcal{P} la puissance échangée avec le fluide, on a $\mathcal{P} > 0$ pour les pompes et $\mathcal{P} < 0$ pour les turbines.

L'énergie reçue par 1m^3 de fluide pendant 1s vaut :

$$W(\text{J.m}^{-3}) = \mathcal{P}(\text{J.s}^{-1}) / Q_V (\text{m}^3.\text{s}^{-1})$$

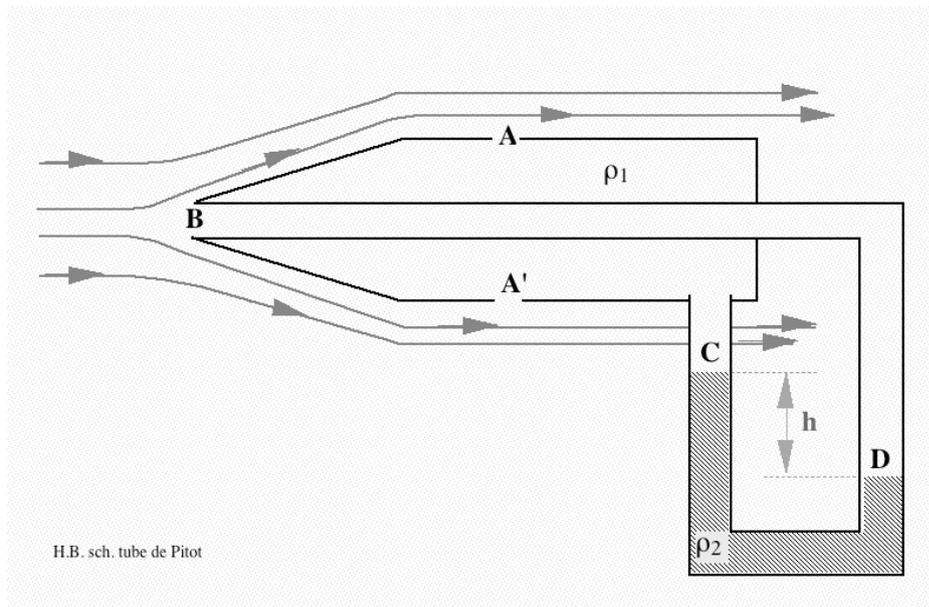
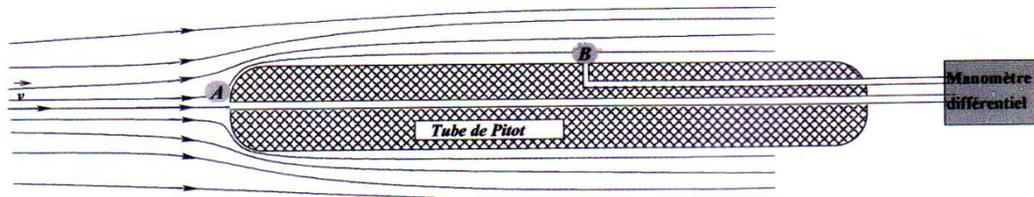
$[\mathcal{P} / Q_V] = \text{MLT}^{-2} \text{L T}^{-1} / \text{L}^3 \text{T}^{-1} = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ est bien une dimension de pression.

L'équation de Bernoulli se généralise et on obtient :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{P}{Q_V} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

7. Applications du Théorème de Bernoulli :

a) Tube de Pitot



Le tube de Pitot permet la mesure de la vitesse d'écoulement d'un gaz supposé incompressible dans ce cas.

On pratique dans un tube un orifice de prise de pression en A et en B.

Le point B est un point d'arrêt car la vitesse est nulle, il n'y a pas d'écoulement dans l'orifice, c'est juste une prise de pression.

L'écoulement est supposé uniforme de vitesse v et de pression p_0 .

En A la pression vaut p_0 . ρ_1 (ρ_{gaz}) ; ρ_2 ($\rho_{liquide}$) du manomètre.

En utilisant la relation de Bernoulli : $p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho_1 v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho_1 v^2$

$$p_B = p_D \text{ et } p_A = p_C = p_0$$

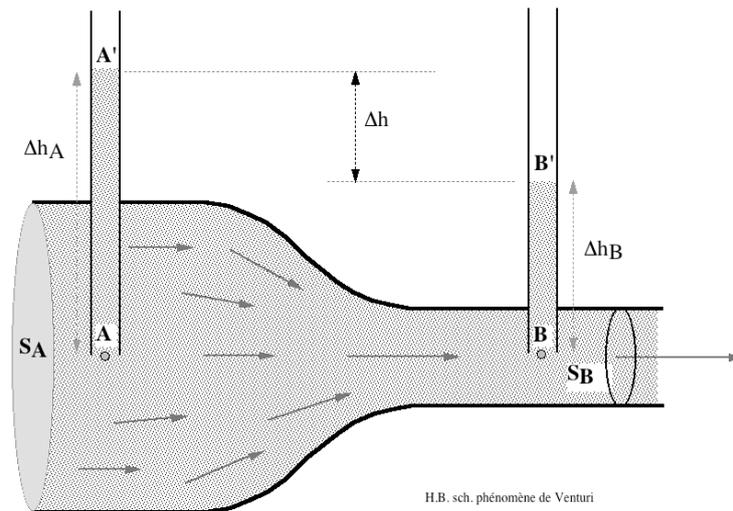
$$p_B - p_A = \frac{1}{2} \rho_1 v^2 = p_D - p_C = \rho_2 g h \text{ (manomètre)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho_1 v^2 = \rho_2 g h \Rightarrow v^2 = \frac{2 \rho_2 g h}{\rho_1} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \rho_2 g h}{\rho_1}}$$

b) Phénomène de Venturi :

Le tube de Venturi est un tube horizontal qui présente un étranglement. Lors d'un écoulement stationnaire, la conservation du débit impose une augmentation de la vitesse au niveau de l'étranglement et la relation de Bernoulli impose une dépression au même niveau.

Quand un écoulement rencontre un étranglement, il y'a dépression : C'est l'effet Venturi.



La conservation du débit donne :

$$S_A v_A = S_B v_B$$

$$\text{Si } S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A$$

L'équation de Bernoulli donne :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Comme : $z_A = z_B$ et $S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A \Rightarrow p_B < p_A$ (dépression)

On a :

$$p_A = p_{A'} + \rho g \Delta h_A = p_{atm} + \rho g \Delta h_A$$

$$p_B = p_{B'} + \rho g \Delta h_B = p_{atm} + \rho g \Delta h_B$$

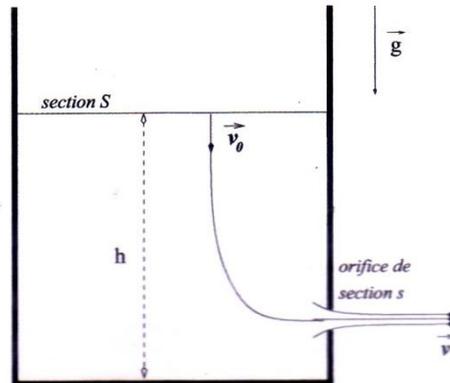
Comme : $p_B < p_A \Rightarrow \Delta h_B < \Delta h_A$

On peut citer comme applications:

La trompe à eau des chimistes, le pulvérisateur,

c) Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir
(formule de Torricelli) :

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur h du liquide.



On fera les hypothèses suivantes :

- La section du cylindre est très grande par rapport à la section de l'orifice $s \ll S$.
- Pas de viscosité.
- Liquide incompressible de masse volumique ρ .
- Régime d'écoulement stationnaire.

L'équation de Bernouilli nous donne entre la surface du réservoir et l'orifice :

$$p_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Or $v_0 \ll v$ car $s \ll S \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

Le débit d'écoulement vaut alors : $Q_V = sv = s\sqrt{2gh}$ (formule de Torricelli)

Exercices d'application:

Exercice 1 :

Un tuyau d'arrosage horizontal de 25 mètres de long a un diamètre de 15 mm.

Il débite 0.5 l d'eau par seconde à travers un orifice terminal de 0,5 cm² de surface. Calculer la suppression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique (l'eau est considérée ici comme un fluide parfait).

Solution :

Considérons deux points A et B, à l'entrée et à la sortie du tuyau : soit l'équation de Bernoulli :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Comme $z_A = z_B$

On aura donc :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Rightarrow p_A - p_B = \Delta p = \frac{1}{2}\rho (v_B^2 - v_A^2)$$

Soit l'équation de la conservation du volume :

$$S_A v_A = S_B v_B = Q_V$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{Q_V}{S_A} \text{ et } v_B = \frac{Q_V}{S_B}$$

$$v_A = 2.83 \text{ m/s} \text{ et } v_B = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = p_A - p_B = p_A - p_{atm} = 4.6 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Exercice 2 :

Soit un tuyau de section 1 cm² où règne une pression de l'eau de 90 mm Hg.

L'écoulement de l'eau se fait avec un débit de 5 cm³/s et une vitesse v. A un certain moment, le tuyau horizontal est rétréci.

1°) Quel est la section du rétrécissement au niveau du tuyau si dans ce rétrécissement la vitesse d'écoulement est le double de la vitesse dans le tuyau?

2°) Quelle est alors la pression de l'eau dans le rétrécissement.

Données : ($\rho_{eau} = 10^3 \text{ kg/m}^3$) ; $P_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)

Solution :

1) L'équation de Bernoulli entre la section S_1 point (1) et le rétrécissement point (2) :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

Tuyau horizontal, donc : $z_1 = z_2$

L'équation de Bernoulli devient :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

L'équation de la conservation du volume :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q_V \text{ avec } v_2 = 2v_1 \Rightarrow S_2 = \frac{S_1}{2} = 0.5 \text{ cm}^2$$

2)

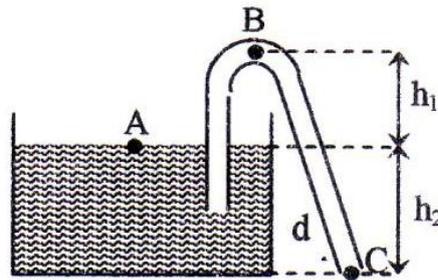
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho (4v_1^2 - v_1^2) = \frac{3}{2} \rho v_1^2$$

Avec $v_1 = \frac{Q_V}{S_1} = 5 \text{ cm/s}$ et $p_1 = 90 \text{ (mm Hg)}$

$$p_2 = p_1 - \frac{3}{2} \rho v_1^2 = 89.97 \text{ (mm Hg)}$$

Exercice n° 3 :

Un réservoir muni d'un siphon de diamètre ($d=60 \text{ mm}$). Si $h_1 = 2 \text{ m}$ et $h_2 = 3.5 \text{ m}$ déterminer la vitesse du liquide (eau) à la sortie du siphon, le débit et la pression absolue au point B



Solution :

L'équation de Bernoulli entre les points A et C :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g z_C$$

On a: $p_A = p_C = p_{atm}$ et $v_A = 0$

$$\frac{1}{2} \rho v_C^2 = \rho g (z_A - z_C)$$

$$v_C = \sqrt{2 g h_2} = 8.28 \text{ m/s}$$

$$Q_V = S v_C = \pi \frac{d^2}{4} v_C = 23.4 \text{ l/s}$$

On a aussi l'équation de Bernoulli entre les points A et B :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$p_A = p_C = p_{atm}$, $v_B = v_C$ et $v_A = 0$

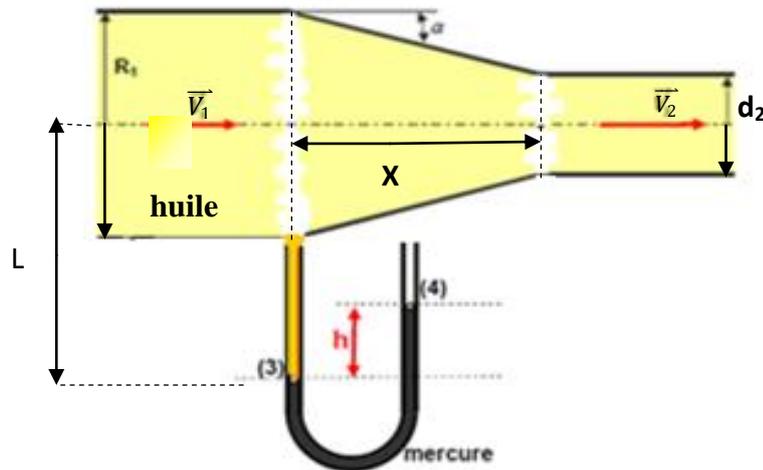
Donc : $p_A + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B \Rightarrow$

$$p_B = p_{atm} - \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g (z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow p_B = p_{atm} - \frac{1}{2} \rho v_C^2 - \rho g h_1 = 46.96 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Exercice 4 :

De l'huile supposée comme fluide parfait est accélérée à travers une buse horizontale en forme de cône convergent. La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.



A) Etude de la buse

Un débit volumique $Q_v = 0,4 \text{ L/s}$, l'huile traverse la section S_1 de diamètre $d_1 = 10 \text{ mm}$ à une vitesse d'écoulement v_1 et une pression p_1 , sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement $v_2 = 4.v_1$ et une pression p_2 .

On donne la masse volumique de l'huile : $\rho_{\text{huile}} = 800 \text{ kg/m}^3$.

- 1) Calculer la vitesse d'écoulement v_1 . En déduire le diamètre d_2 .
- 2) Calculer la longueur X , si l'angle de convergence $\alpha = 15^\circ$.
- 3) En appliquant le Théorème de Bernoulli, déterminer la pression p_1 .

B) Etude du manomètre (tube en U)

Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

On donne : $L = 1274 \text{ mm}$, l'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Déterminer la dénivellation h du mercure.

Solution :

A) Etude de la buse

1) Vitesse d'écoulement : $Q_v = S_1 v_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1$

$$v_1 = \frac{4Q_v}{\pi d_1^2} = 5 \text{ m/s}$$

Equation de continuité : $S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 \pi \frac{d_1^2}{4} = v_2 \pi \frac{d_2^2}{4} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} d_1 = 5 \text{ mm}$

2) $\text{tg}(\alpha) = \frac{d_1 - d_2}{2X} \Rightarrow X = \frac{d_1 - d_2}{2 \text{tg}(\alpha)}$

avec $d_1 = 2d_2$

$$X = \frac{d_2}{2 \text{tg}(\alpha)} = 9.33 \text{ mm}$$

3) Appliquons l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie du buse :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

On a : $z_1 = z_2$ et $p_2 = p_{atm}$

$$\text{On aura : } p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_{huile} (v_2^2 - v_1^2) = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

B) Etude du manomètre :

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre 1 et 3 :

$$p_3 - p_1 = \rho_{huile} g L \Rightarrow p_3 = p_1 + \rho_{huile} g L = 2.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre 3 et 4 :

$$p_3 - p_4 = \rho_{mercure} g h$$

$$h = \frac{p_3 - p_4}{\rho_{mercure} g} = 1.2 \text{ m}$$

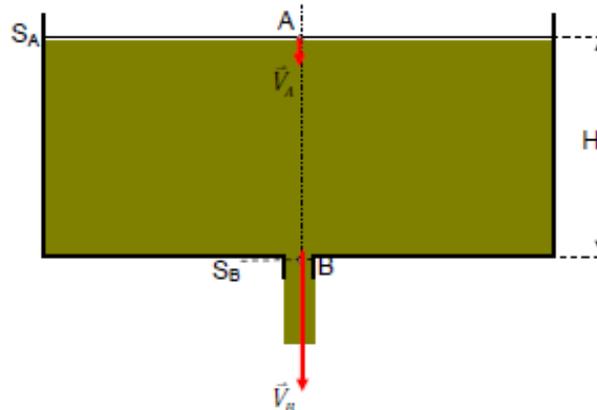
Exercice 5 :

Le réservoir cylindrique représenté ci-dessous, ouvert à l'air libre, a une section S_A de diamètre $D_A = 2 \text{ m}$. Il est muni, à sa base, d'un orifice de vidange de section S_B et de diamètre $D_B = 14 \text{ mm}$. Le réservoir est plein jusqu'à une hauteur $H = 2,5 \text{ m}$ d'un liquide considéré comme fluide parfait, de masse volumique $\rho = 817 \text{ kg/m}^3$.

On donne : La pression atmosphérique $P_{atm} = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

L'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

On note $\alpha = (S_B / S_A)$.



On procède à la vidange du réservoir. Le liquide a une vitesse moyenne d'écoulement au point A notée v_A , et sa vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice est notée v_B .

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire v_A en fonction de v_B et α .

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, établir l'expression littérale de la vitesse V_B en fonction de g , H et α .

3) Calculer la valeur de α .

4) Calculer v_B en considérant que le niveau de liquide varie lentement.

5) Déterminer le débit volumique Q_V du fluide qui s'écoule à travers l'orifice. (En litres par seconde)

6) Quelle serait la durée T de vidange si ce débit restait constant ?

Solution :

1) Equation de continuité : $S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_A = \alpha v_B$

2) On applique l'équation de Bernouilli entre A et B :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$$\Rightarrow (p_A - p_B) + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2) + \rho g (z_A - z_B) = 0$$

On a : $p_A = p_B = p_{atm}$, $v_A = \alpha v_B$, $z_A - z_B = H$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_B^2 (\alpha^2 - 1) + \rho g H = 0 \Rightarrow v_B^2 = \frac{2gH}{(1-\alpha^2)}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{(1-\alpha^2)}}$$

3) $\alpha = \frac{S_B}{S_A} = \frac{D_B^2}{D_A^2} \Rightarrow A.N. \alpha = 4.9 \cdot 10^{-5}$

4) On considère dans ce cas : $v_A = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH}$ A.N. $v_B = 7 \text{ m/s}$

5) $Q_V = S_B v_B = \frac{\pi D_B^2}{4} v_B$; A.N. $Q_V = 1 \text{ l/s}$

6) $Q_V = \frac{V}{T} \Rightarrow T = \frac{V}{Q_V} = \frac{\pi D_A^2}{4Q_V} H$; A.N. $T = 7854 \text{ s} = 130 \text{ mn} = 2 \text{ h } 10 \text{ mn}$

Exercice 6:

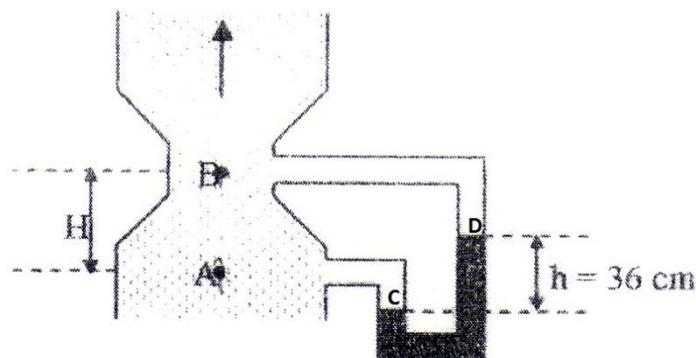
Dans un tube de Venturi représenté ci -dessous. L'eau s'écoule de bas en haut.

La dénivellation du mercure du manomètre différentiel est $h = 36 \text{ cm}$. Le diamètre du tube en A est 30 cm , et en B il est de 15 cm .

1) Calculer la vitesse en B.

2) Calculer le débit de l'eau considérée comme un fluide parfait.

On donne: eau = 1 g.cm^{-3} ; $\rho_{Hg} = 13,6 \text{ g.cm}^{-3}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$



Solution: $\rho = \rho_{\text{eau}}$

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$
$$(p_A - p_B) = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g (z_B - z_A) = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g H$$

On a aussi dans le manomètre :

$$p_C = p_A + \rho g (z_A - z_C)$$

$$p_D = p_B + \rho g (z_B - z_D)$$

$$\Rightarrow p_C - p_D = (p_A - p_B) + \rho g [(z_A - z_B) + (z_D - z_C)] = (p_A - p_B) + \rho g [-H + h]$$

$$p_C - p_D = \rho_{Hg} g h$$

$$(p_A - p_B) = \rho_{Hg} g h - \rho g [-H + h]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g H = \rho_{Hg} g h - \rho g [-H + h] \Rightarrow \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) = g h (\rho_{Hg} - \rho)$$

$$(v_B^2 - v_A^2) = \frac{2 g h (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho}$$

$$Q_V = S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_A = \frac{S_B v_B}{S_A}$$

$$\left(v_B^2 - \frac{S_B^2 v_B^2}{S_A^2} \right) = \frac{2 g h (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho}$$

Avec :

$$S_A = \pi \frac{d_A^2}{4} \text{ et } S_B = \pi \frac{d_B^2}{4}$$

$$v_B^2 = \frac{2 g h (\rho_{Hg} - \rho)}{\rho \left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2} \right)} \Rightarrow v_B = 9.84 \text{ m/s}$$

$$Q_V = S_B v_B = 0.174 \text{ m}^3/\text{s}$$

Chapitre 5

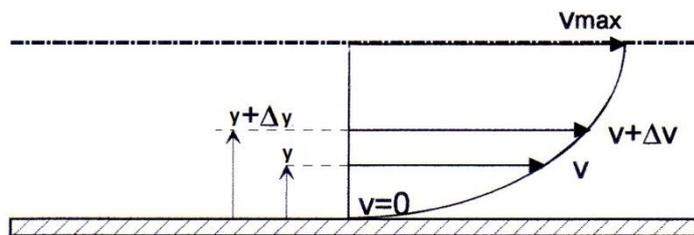
Dynamique des fluides réels

1. Introduction: Fluide réel

Dans le modèle réel d'un fluide, on ne néglige pas les forces de viscosité tangentielle qui s'opposent au glissement relatif de deux couches voisines du fluide.

2. Profil des vitesses

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un *profil des vitesses*.

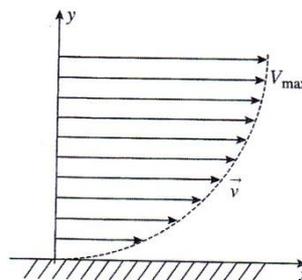


Profil des vitesses

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe, lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance y de cette couche au plan fixe : $v = v(y)$.



Autre représentation du profil des vitesses

3. Notions de viscosité :

❖ Viscosité dynamique :

Considérons deux couches de fluide contiguës distantes de dy . La force de frottement \vec{F} qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit dv à leur surface S et inversement proportionnelle à dy :

$$|\vec{F}| = \eta S \left| \frac{dv(y)}{dy} \right| \quad \text{Le facteur de proportionnalité } \eta \text{ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.}$$

Dimension : $[\eta] = \text{M} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$.

Unité : Dans le système international (SI), l'unité de viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : $1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$.

❖ Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ .

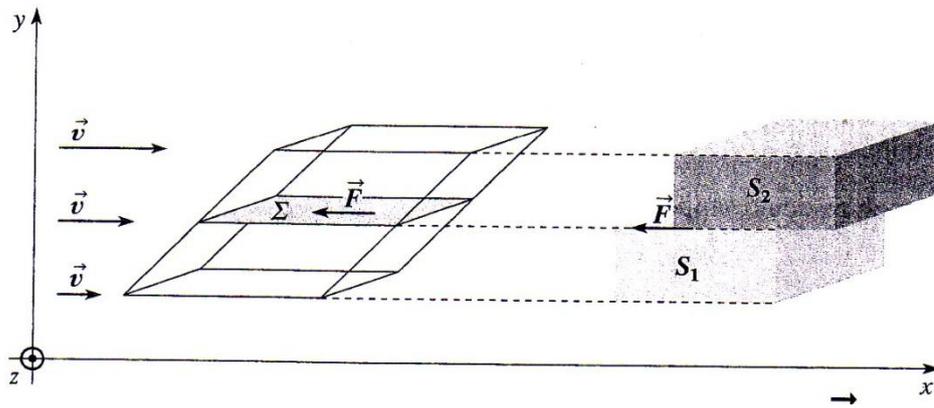
$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Dimension : $[\nu] = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$.

Unité : Dans le système international (SI), l'unité de viscosité cinématique n'a pas de nom particulier : (m^2/s) .

4. Champ de vitesse unidirectionnel de la forme : $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$

Soit le cas simple où les plans parallèles à Ox glissent les uns sur les autres. Ce cas est une bonne approximation d'un écoulement laminaire réel si les dimensions selon (Ox) et (Oz) sont très grandes devant l'épaisseur selon (Oy) . Considérons alors deux éléments de fluide S_1 et S_2 séparés par la surface Σ , d'aire S normale à (Oy) .



Force de frottement \vec{F} exercée par S_1 sur S_2

Soit le parallélépipède élémentaire de volume $dV = S dy$, on constate qu'en réalité il est soumis à travers ses faces d'aire S , à deux forces de frottement :

$$\vec{F}_1 = -\eta S \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0} \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_2 = \eta S \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0+dy} \vec{e}_x$$

Les forces de frottement exercées sur S , à travers ces deux faces sont opposées. La résultante des forces de frottement est donc :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\eta S \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0+dy} \right] \vec{e}_x \\ &= \eta S \left[\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0+dy} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=y_0}}{dy} \right] dy \vec{e}_x = \eta S \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \vec{e}_x \end{aligned}$$

Ce qui correspond à une force volumique :

$$\overline{F/V} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} S dy \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

Dans un écoulement de fluide incompressible homogène, les forces de frottement sont équivalentes à une force volumique dont l'expression est :

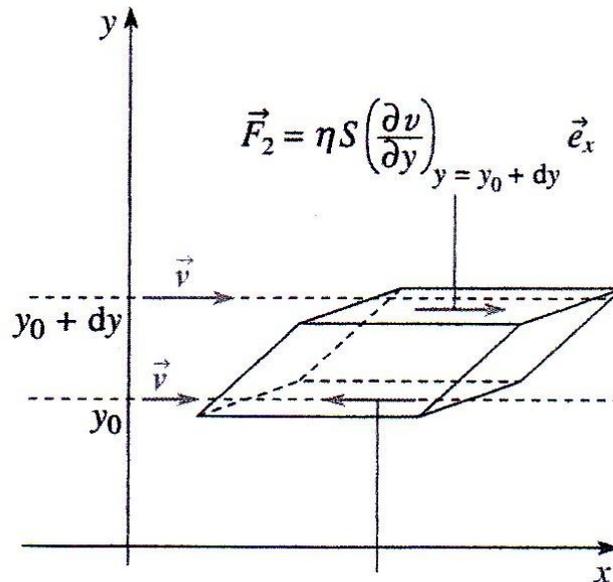
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x = \vec{\Delta} \vec{v}(y, t) \vec{e}_x = \vec{\Delta} \vec{v} \Rightarrow \overline{F/V} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

Cherchons l'équivalent massique : force de frottement massique

$$\overline{F/m} = \overline{F/V} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\eta}{\rho} \vec{\Delta} \vec{v}$$

Dans un écoulement de fluide incompressible homogène, les forces de frottement sont équivalentes à une force massique dont l'expression est :

$$\text{Comme } \nu = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow \overline{\mathbf{F}}/m = \nu \overline{\Delta} \vec{v}$$



Forces de frottement sur un volume élémentaire dans le cas d'un écoulement unidirectionnel

Remarque : $\overline{\Delta} \vec{v} = \overline{\Delta} \vec{v}(y, t) \vec{e}_x$ dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, mais plus généralement $\overline{\Delta} \vec{v} = \overline{\Delta} \vec{v}(\vec{r}, t)$

5. Régimes d'écoulement d'un fluide visqueux : Nombre de Reynolds :

Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds et donné par :

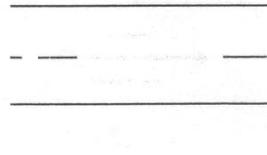
$$R_e = \frac{\rho v D}{\eta} \quad \text{ou} \quad R_e = \frac{v D}{\nu} \quad \text{avec :}$$

ρ : masse volumique du fluide, v : vitesse moyenne, D : diamètre de la conduite
 η : viscosité dynamique du fluide, ν : viscosité cinématique.

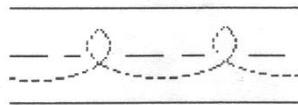
L'expérience montre que :

<i>si</i> $Re < 2000$	<i>le régime est laminaire</i>
<i>si</i> $2000 < Re < 3000$	<i>le régime est intermédiaire</i>
<i>si</i> $Re > 3000$	<i>le régime est turbulent</i>

* *A faible débit* : les particules d'un fluide ont une vitesse parallèle au sens de l'écoulement : le régime est dit laminaire.



* *A fort débit* : il y'a apparition de tourbillons : le régime est dit turbulent.



La détermination de la valeur de R_e peut nous indiquer si un régime d'écoulement est laminaire ou turbulent.

6. Equation fondamentale de la dynamique des fluides visqueux :

Dans un référentiel galiléen, l'équation fondamentale d'Euler pour un fluide par unité de volume en écoulement visqueux s'écrit en tenant compte des forces volumiques de viscosité (par unité de volume) $\vec{F}/V = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$

On ajoutera donc dans l'équation précédente des fluides non visqueux le terme :

$$\vec{F}/V = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} p + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

$$\text{Avec : } \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left[\overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right]$$

Remarque : Si on néglige la viscosité du fluide ($\eta = 0$) on retrouve bien la loi fondamentale des fluides en écoulement parfait :

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} p$$

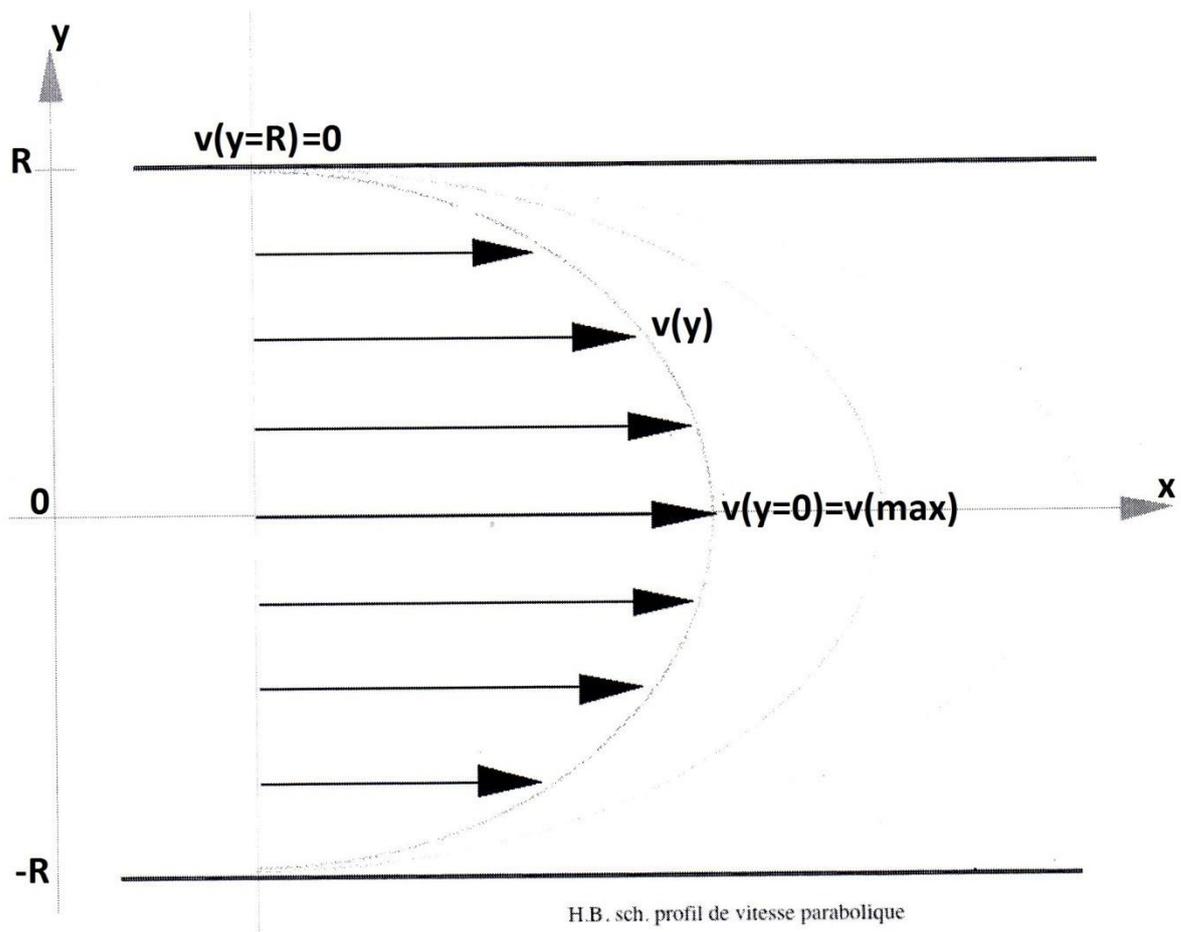
7. Ecoulement des liquides visqueux : Ecoulement laminaire dans les conduites cylindriques : (Lois de Poiseuille).

En 1835, Jean Leonard Marie de Poiseuille (1797-1869), fit une série d'expériences pour déterminer l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tuyau étroit afin de comprendre la circulation sanguine.

On considère un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$.

Le tube est horizontal, et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée du tube et la sortie du tube. On supposera que l'écoulement est laminaire.

$$\Delta p = p_e - p_s$$



Profil de vitesse dans un tube cylindrique

Le fluide compris entre 0 et y subit sur une longueur L des forces de pressions à chaque extrémité du tube et la force de frottement sur la paroi latérale de surface $S = 2\pi yL$: On a donc à l'équilibre :

$$F = -\eta S_L \frac{dv(y)}{dy} = -\eta 2\pi yL \frac{dv(y)}{dy} = \Delta p \cdot S = \Delta p \cdot \pi y^2$$

Avec : $S_L = 2\pi yL$ (surface latérale) et $S = \pi y^2$ (surface de base)

$$\frac{dv(y)}{dy} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} y \Rightarrow dv(y) = -\frac{\Delta p}{2\eta L} y dy$$

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{y^2}{2} + C$$

On a $v(y = R) = 0 \Rightarrow C = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2 \Rightarrow v(y) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - y^2)$

On obtient un profil de vitesse parabolique, la vitesse est maximale sur l'axe $v_{max}(y = 0) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \cdot R^2$, et elle est nulle sur les parois $v(y = R) = 0$.

La formule de Poiseuille relie le débit volumique avec la différence de pression imposée.

Le calcul du débit volumique nous donne :

$$Q = \iint \vec{v} \cdot dS \vec{n} = \int_0^R v(y) 2\pi y dy = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - y^2) 2\pi y dy$$

$$Q = \frac{\Delta p \pi}{2\eta L} \left[\frac{R^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^R = \frac{\Delta p \pi}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\Delta p \pi}{2\eta L} \frac{R^4}{4}$$

$$Q = \frac{\Delta p \pi}{2\eta L} \frac{R^4}{4} = \frac{\Delta p \pi}{8\eta L} R^4$$

L'expression du débit : $Q = S v_{moy} \Rightarrow v_{moy} = \frac{Q}{S}$ avec $S = \pi R^2 \Rightarrow$

$$v_{moy} = \frac{\Delta p}{8\eta L} R^2$$

On remarque que : $v_{moy} = \frac{v_{max}}{2}$

En appliquant le principe de la loi de Poiseuille :

$$\text{La surpression dans la canalisation est : } \Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q$$

En posant : $R_M = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$ qui représente la résistance à l'écoulement :

$$\Delta p = R_M \cdot Q$$

$\Delta p = R_M Q$ (perte de charge entre les extrémités d'une canalisation horizontale, traversée par un fluide visqueux de débit Q).

8. Equivalence : Loi de Poiseuille, loi d'Ohm

$$\Delta p = R_M \cdot Q \Leftrightarrow U = R_{Elec} \cdot I$$

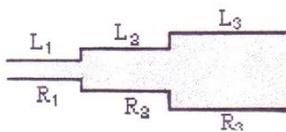
$$P(\text{puissance}) = R_M Q^2 \Leftrightarrow P(\text{puissance}) = R_{Elec} \cdot I^2$$

Résistances d'écoulement en série : Avec $R_i = \frac{8\eta L_i}{\pi R_i^4}$

Hydrodynamique

$$R_{\text{équi}} = \sum_i R_i$$

Electricité

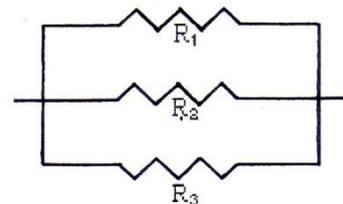
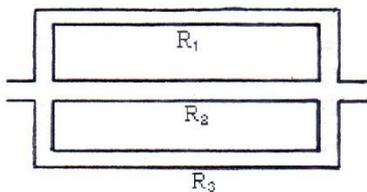


Résistances d'écoulement en parallèles : Avec $R_i = \frac{8\eta L_i}{\pi R_i^4}$

Hydrodynamique

$$\frac{1}{R_{\text{équi}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Electricité



9. Notions de pertes de charge :

Lors d'un écoulement dans une conduite, les forces de frottement dissipent une partie de l'énergie cinétique et potentielle ce qui se traduit par l'existence de « pertes de charges » dont il s'agit de tenir compte.

Considérons un écoulement cylindrique horizontal stationnaire et incompressible.

Si on applique la relation de Bernouilli entre l'entrée et la sortie, on obtient :

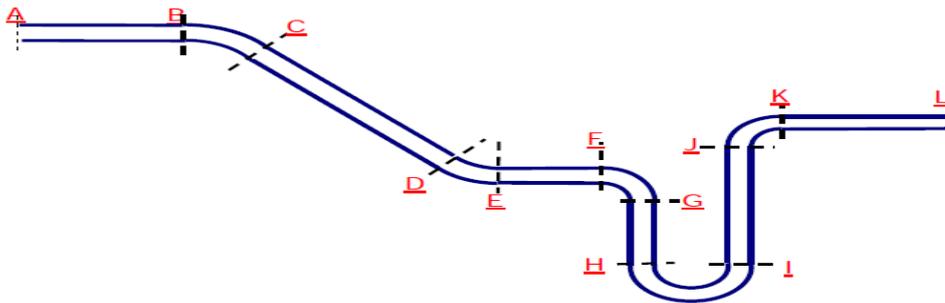
$$p_1 = p_2$$

Expérimentalement, on observe qu'il faut imposer une pression plus importante en entrée pour entretenir le régime permanent, car les forces de viscosité résistent à l'écoulement.

Il faut imposer donc une surpression Δp_f que l'on appelle perte de charge en pression due à l'existence de forces de frottements (viscosité).

Il existe deux types de pertes de charge :

- A) Les pertes de charges régulières : ce sont des pertes de charges en longueur dues aux frottements le long du trajet.
- B) Les pertes de charge singulières : dans un circuit, la présence de coudes, de robinets, de vannes, de modifications brutales de section produit des pertes de charges singulières.



Pertes de charge singulières produites par les modifications brutales du circuit

Pour diminuer l'ensemble des pertes de charge dans une canalisation, afin de diminuer les coûts de fonctionnement des pompes, il faut :

- 1) Diminuer le long de la canalisation.
- 2) Diminuer le débit de circulation.
- 3) Augmenter le diamètre des canalisations.
- 4) Faire circuler les liquides les moins visqueux.
- 5) Utiliser des matériaux de faible rugosité.
- 6) Diminuer le nombre « d'accidents » sur la canalisation.

10. Théorème de Bernouilli généralisé :

En tenant compte des pertes de charge et de l'échange d'énergie avec les machines : L'équation de Bernouilli généralisée devient :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{P}{Q_V} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_f$$

ΔP_f est la perte de charge (exprimée en Pascal).

$$\Delta P_f = \Delta P_r + \Delta P_s$$

ΔP_r est la perte de charge régulière et ΔP_s est la perte de charge singulière.

On aura donc :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{P}{Q_v} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_r + \Delta P_s$$

11. Pertes de charge régulières ou de frottement pour les différents types d'écoulement: (Formule de Colebrook: Diagramme de Moody).

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides ; il se rencontre dans les tuyaux lisses aussi bien que dans les tuyaux rugueux.

Entre deux points séparés par une longueur L, dans un tuyau de diamètre D apparaît une perte de pression p. exprimée sous la forme suivante :

Utilisons le résultat de Poiseuille pour exprimer la perte de charge en faisant intervenir le diamètre D, la longueur L, la vitesse moyenne ainsi que la masse volumique et le nombre de Reynolds :

$$Q = \frac{\Delta P_r \pi}{8 \eta L} R^4 \Rightarrow \Delta P_r = \frac{Q 8 \eta L}{\pi R^4} = \frac{v \pi R^2 8 \eta L}{\pi R^4} = \frac{v 8 \eta L}{R^2}$$

$$\Rightarrow \Delta P_r = \frac{v 8 \eta L}{R^2} = \frac{v 8 \eta L}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{32 v \eta L}{D^2}$$

Le nombre de Reynolds de cet écoulement laminaire s'écrit : $R_e = \frac{\rho v D}{\eta}$

$$\text{Donc } \Delta P_r = \frac{1}{2} \frac{64}{\frac{\rho v D}{\eta}} \rho v^2 \frac{L}{D} = \frac{64}{R_e} \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} \quad (\text{Pa})$$

(Formule de Darcy-Weisbach)

$$\text{Avec : } \lambda = \frac{64}{R_e}$$

On définit la perte de charge linéaire :

$$\Delta h = \frac{\Delta P_r}{\rho g} = \lambda \frac{1}{2g} v^2 \frac{L}{D} \quad \text{Perte de charge exprimée en mètres de colonne de fluide (mCF)}$$

λ est un coefficient sans dimension appelé coefficient de perte de charge linéaire.

Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient.

Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$

Dans ce cas on remarque que le coefficient de perte de charge est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re ; l'état de la surface n'intervient pas et donc ne dépend pas de la nature de la tuyauterie.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \text{ (loi de Poiseuille)}$$

$$\text{Avec, } Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Cas de l'écoulement $2000 < Re < 10^5$

Dans ce cas, la turbulence est encore modérée, la surface de la tuyauterie est encore considérée comme lisse. Là encore λ ne dépend que de Re

$$\lambda = (100 Re)^{-0.25}$$

(Formule de Blasius)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2.51} \right)$$

(Formule implicite de Von Karman)

Cas de l'écoulement : $Re > 10^5$

La turbulence devient très importante et λ ne dépend que de $\frac{\varepsilon}{D}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left[3.71 \frac{\varepsilon}{D} \right]$$

(formule de Nikuradse)

Avec, ε hauteur moyenne des aspérités de la surface de la canalisation ou la rugosité absolue, $\frac{\varepsilon}{D}$ étant la rugosité relative, et D diamètre de la section.

Remarque :

Les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge λ résulte de mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes qui ont été proposées pour sa détermination.

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds R_e est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds R_e et de la rugosité absolue ε du tuyau.

La formule de Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7 D} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right]$$

Formule de Colebrook

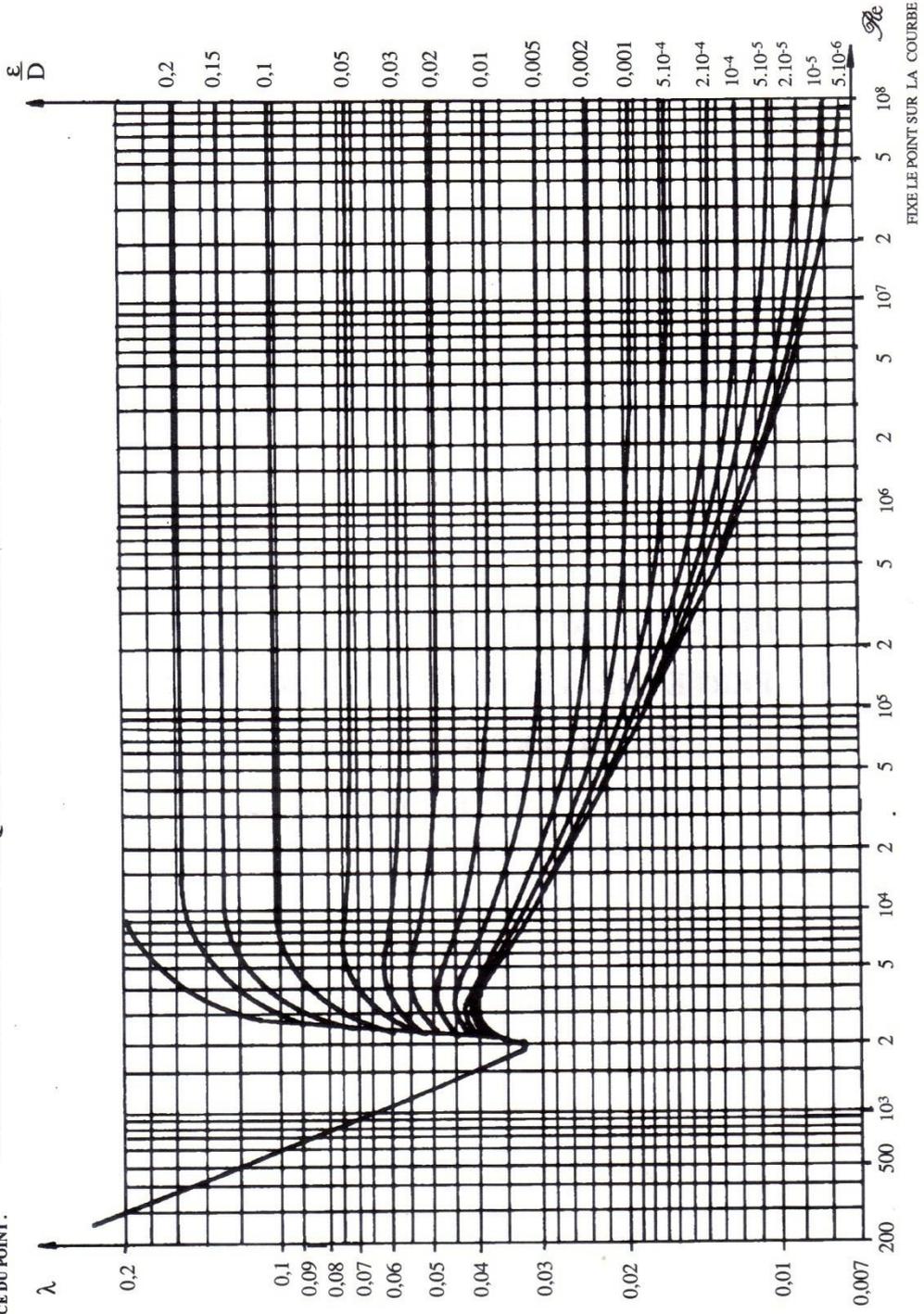
Ci-dessous est donnée la traduction graphique de la formule de Colebrook

Donnée par le diagramme de Moody.

LI.
HORIZONTALEMENT
EN FACE DU POINT.

TRADUCTION GRAPHIQUE DE LA FORMULE DE COLEBROOK

FIXE LA COURBE



FIXE LE POINT SUR LA COURBE

12. Pertes de charge singulières

Dans beaucoup de cas expérimentaux, les expériences montrent que les pertes de charge singulières sont à peu près proportionnelles au carré de la vitesse et donc on a adopté la forme suivante:

$$\Delta P_s = K \frac{\rho v^2}{2} \text{ en (Pa)}$$

$$\text{ou } \Delta h_s = \frac{\Delta P_s}{\rho g} = K \frac{v^2}{2g} \text{ en mètres de colonne de fluide (mCF)}$$

K est appelé coefficient de pertes de charge singulières (sans dimension).

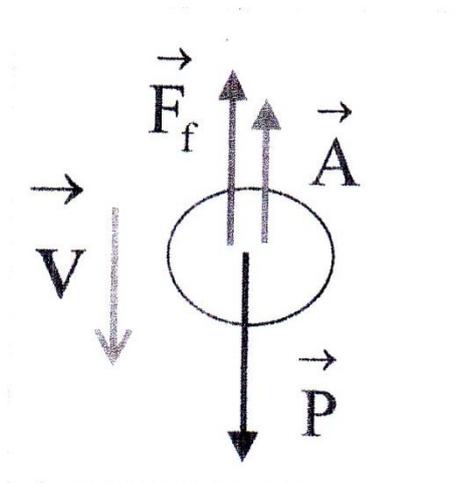
La détermination de ce coefficient est principalement du domaine de l'expérience.

Ci-joint en fin de chapitre un tableau quelques valeurs de K pour différentes singularités :

13. Résistance des fluides au mouvement des corps immergés :

Loi de Stokes.

Lorsque qu'un objet se déplace dans un fluide visqueux, il subit de la part de ce fluide une force qui s'oppose à son mouvement. Cette force dépend de la vitesse du corps et du fluide (viscosité du fluide).



Etude de la chute libre d'un corps dans un fluide visqueux :

Soit un objet sphérique plongé dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité dynamique η

\vec{F}_f : force de frottement ou force de viscosité

\vec{F}_A : poussée d'Archimède. $F_A = \rho_L V g$ avec :
 ρ_L (masse volumique de fluide considéré), V (volume du corps)

\vec{P} : poids du corps. $P = mg = \rho V g$; avec :
 ρ (masse volumique du corps considéré), V (volume du corps)

- A faible vitesse (écoulement laminaire), la force de viscosité s'écrit :

$$F_f = K \eta v$$

K : coefficient géométrique dépendant de la forme du corps

Exemple : pour une sphère de rayon R : $K = 6\pi R$ on aura donc :

$$F_f = 6\pi R \eta v \text{ (Loi de Stokes).}$$

- A vitesse moyenne, il existe une région de turbulence derrière l'objet :
La force de viscosité s'écrit :

$$F_f = C_X \frac{S \rho_L v^2}{2}$$

S : Section droite de l'objet

ρ_L : Masse volumique du fluide

C_X : Coefficient de résistance aérodynamique sans dimension qui dépend de la forme de l'objet, de la rugosité de la surface et du nombre de Reynolds.

- A vitesse élevée, la force de viscosité augmente très vite et des turbulences apparaissent tout autour de l'objet.

Remarque :

La loi de Stokes n'est valable que pour des vitesses faibles et des objets de faible dimension.

Appliquons l'équation fondamentale de la dynamique à ce système :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_A = m\vec{a} \Rightarrow \rho V g - K \eta v - \rho_L V g = m \frac{dv}{dt}$$

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe vertical Oz dirigé vers le bas

$$K \eta v + m \frac{dv}{dt} = Vg(\rho - \rho_L)$$

On résout cette équation différentielle du 1^{er} degré avec second membre :

Solution de cette équation sans second membre :

$$K \eta v + m \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dv} = -\frac{K}{m} \eta dt \Rightarrow \ln v = -\frac{K}{m} \eta t + C$$

$$\Rightarrow v = C' e^{-\frac{K}{m} \eta t}$$

Solution avec second membre :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta}$$

Solution générale : la somme des deux solutions :

$$v = C' e^{-\frac{K}{m} \eta t} + \frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta}$$

Calcul de C' : à $t = 0$; $v = 0$

$$0 = C' + \frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta} \Rightarrow C' = -\frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta}$$

$$\text{Donc: } v = \frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta} (1 - e^{-\frac{K}{m} \eta t})$$

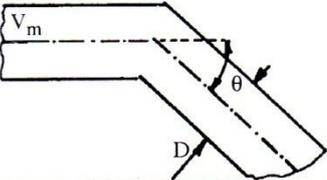
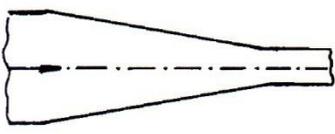
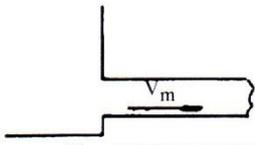
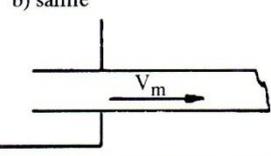
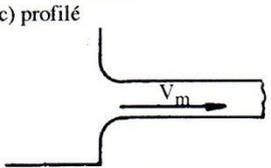
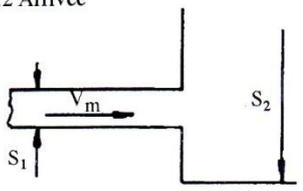
$$t \rightarrow \infty ; v_{limite} = \frac{Vg(\rho - \rho_L)}{K \eta}$$

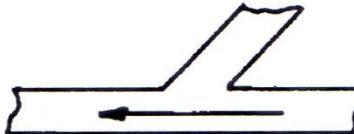
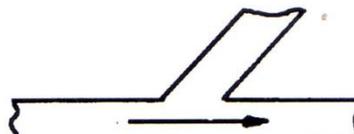
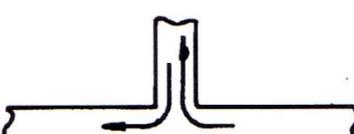
Pour un corps sphérique :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ et } K = 6\pi R \Rightarrow v_{limite} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g(\rho - \rho_L)}{6\pi R \eta} = \frac{2}{9} \frac{R^2}{\eta} g(\rho - \rho_L)$$

C'est la vitesse limite.

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K																								
1) Elargissement brusque 	$K \frac{V_{m1}^2}{2g}$	Formule de Barré de St Venant $K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$																								
2) Elargissement progressif 	$K \frac{V_{m1}^2}{2g}$	$K = b \left(\frac{d^2}{D^2} - 1\right)^2$ avec <table border="1"> <tr> <td>2θ</td> <td>5°</td> <td>6°</td> <td>7°</td> <td>8°</td> <td>10°</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>0,049</td> <td>0,062</td> <td>0,075</td> <td>0,088</td> <td>0,119</td> </tr> </table> <table border="1"> <tr> <td>2θ</td> <td>16</td> <td>18</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>0,245</td> <td>0,307</td> <td>0,389</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> </table> <p>Si $2\theta > 40^\circ$, il y a décollement du fluide; comportement comme un élargissement brusque</p>	2θ	5°	6°	7°	8°	10°	b	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119	2θ	16	18	20	30	40	b	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9
2θ	5°	6°	7°	8°	10°																					
b	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119																					
2θ	16	18	20	30	40																					
b	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9																					
3) Diaphragme 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = \left(\frac{S}{m S_o} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}$ avec $m = 0,62$																								
4) Rétrécissement de Longueur L 	$K \frac{V_{mo}^2}{2g}$	$K = \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}$ avec $m = 0,62$ $K = 0,49$; on prend $K = 0,5$ valable pour S suffisamment différent de S_o																								
5) Coude 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	Formule de Weisbach $K = \left[0,131 + 1,847 \left(\frac{D}{2 R_0}\right)^{\frac{7}{2}} \right] \frac{\theta}{90^\circ}$ θ en degrés																								

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K
6) Coude à angles vifs 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	Formule de Weisbach $K = 0,947 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\theta}{2}$
7) Rétrécissement progressif 	négligeable	
8) Raccordements Conduite-Réservoir		
8.1 Départ a) brusque 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,5$
b) saillie 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1$
c) profilé 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,05$
8.2 Arrivée 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \text{ avec } S_2 \gg S_1$ $K \approx 1$ valable quelle que soit la forme d'arrivée

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K
9) Branchements et dérivations de mêmes diamètres (d'après SCIMEMI)		
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 0,5
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 1
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 3
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 0,05
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 0,15
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 1,5
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	K = 0,10

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K																														
ROBINETTERIES																																
10) Vanne opercule	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$\frac{x}{D}$</th> <th>$\frac{1}{8}$</th> <th>$\frac{2}{8}$</th> <th>$\frac{3}{8}$</th> <th>$\frac{4}{8}$</th> <th>$\frac{5}{8}$</th> <th>$\frac{6}{8}$</th> <th>$\frac{7}{8}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,07</td> <td>0,26</td> <td>0,81</td> <td>2,06</td> <td>5,52</td> <td>17</td> <td>98</td> </tr> </tbody> </table> <p>La réduction du débit est sensible en fin de course.</p>	$\frac{x}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98														
$\frac{x}{D}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$																								
K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98																									
11) Vanne papillon	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,24</td> <td>0,52</td> <td>0,90</td> <td>1,5</td> <td>3,9</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>11</td> <td>19</td> <td>33</td> <td>118</td> <td>750</td> </tr> </tbody> </table>	α°	5	10	15	20	30	K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9	α°	40	45	50	60	70	K	11	19	33	118	750						
α°		5	10	15	20	30																										
K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9																											
α°	40	45	50	60	70																											
K	11	19	33	118	750																											
12) Robinet à Boisseau	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,05</td> <td>0,29</td> <td>0,75</td> <td>1,6</td> <td>3,1</td> <td>5,5</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>35</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>55</th> <th>60</th> <th>65</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>9,7</td> <td>17</td> <td>31</td> <td>53</td> <td>110</td> <td>206</td> <td>490</td> </tr> </tbody> </table>	α°	5	10	15	20	25	30	K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5		35	40	45	50	55	60	65	K	9,7	17	31	53	110	206	490
α°		5	10	15	20	25	30																									
K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5																										
	35	40	45	50	55	60	65																									
K	9,7	17	31	53	110	206	490																									
13) Clapet à battant	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> <th>45</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>90</td> <td>62</td> <td>42</td> <td>30</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>14</td> <td>9,5</td> <td>6,6</td> <td>3,2</td> <td>1,7</td> </tr> </tbody> </table>	α°	15	20	25	30	45	K	90	62	42	30	20	α	40	45	50	60	70	K	14	9,5	6,6	3,2	1,7						
α°		15	20	25	30	45																										
K	90	62	42	30	20																											
α	40	45	50	60	70																											
K	14	9,5	6,6	3,2	1,7																											
<p>La Société PONT A MOUSSON donne les valeurs de K pour le clapet positionné horizontalement, comme sur le schéma alors que M. CARLIER (Hydraulique générale et appliquée) donne les mêmes valeurs pour le clapet positionné vericalement.</p>																																

Exercices d'application :

Exercice 1: Débit et énergie cinétique d'un fluide visqueux de vitesse à répartition parabolique :

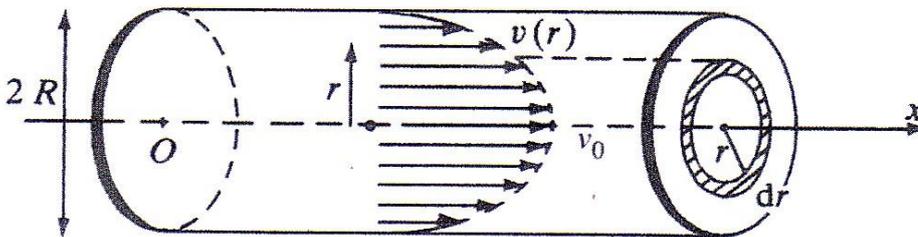
Un fluide visqueux incompressible, de masse volumique ρ , s'écoule dans un tube cylindrique d'axe horizontal Ox , de rayon R et de longueur L . En régime linéaire permanent, le champ des vitesses, en tout point M du fluide à la distance r de l'axe Ox , obéit à la loi à répartition

parabolique : $v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$; où v_0 est la vitesse du fluide sur l'axe Ox .

- 1) Schématiser le profil de vitesse de cet écoulement et calculer le débit volumique du fluide, à travers le tube cylindrique, en fonction de R et v_0 .
- 2) En déduire, en fonction de v_0 , la vitesse moyenne v_m à travers une section droite du tube.
- 3) Calculer l'énergie cinétique du fluide contenu dans le tube en fonction de L , ρ , R et v_0 .

Solution :

- 1) Le profil « parabolique » des vitesses de cet écoulement est :



Le débit volumique élémentaire à travers la section droite :

$$dQ_V = v(r) dS = v(r) 2\pi r dr = 2\pi v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr$$

$$\begin{aligned} Q_V &= \int_0^R 2\pi v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = 2\pi v_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = 2\pi v_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr \\ &= 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{\pi R^2 v_0}{2} \end{aligned}$$

- 2) La vitesse moyenne est définie par :

$$Q_V = S v_{moy} = \pi R^2 v_{moy} \Rightarrow v_{moy} = \frac{Q_V}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2 v_0}{2\pi R^2} = \frac{v_0}{2}$$

La vitesse moyenne est donc égale à la moitié de la vitesse maximale de l'écoulement laminaire v_0 .

- 3) L'énergie cinétique du fluide contenu dans le volume élémentaire $dV = dr r d\theta dz$

de masse $dm = \rho dV = \rho dr r d\theta dz$ est :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm v^2(r) = \frac{1}{2} \rho dV v^2(r) = \frac{1}{2} \rho v^2(r) dr r d\theta dz = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 dr r d\theta dz$$

L'énergie totale du fluide contenu dans la conduite cylindrique :

$$E_c = \int dE_c = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 r dr$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho v_0^2 2\pi L \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 r dr = \frac{1}{2} \rho v_0^2 2\pi L \int_0^R \left(1 + \frac{r^4}{R^4} - 2 \frac{r^2}{R^2}\right) r dr$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho v_0^2 2\pi L \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6} - \frac{R^2}{2}\right)$$

Donc

$$E_c = \frac{1}{6} \rho v_0^2 \pi L R^2$$

Exercice 2 : Loi de vidange d'un fluide visqueux : Mesure de la viscosité. Nombre de Reynolds.

Un dissolvant liquide, de viscosité absolue η , de viscosité cinématique ν et de masse volumique ρ , est placé dans un grand vase cylindrique de section S ; ce liquide s'écoule par un tube fin horizontal cylindrique de rayon r , de section s ($s \ll S$) et de longueur l .

L'écoulement est suffisamment lent pour admettre que l'écoulement est permanent à chaque instant avec un débit volumique Q donné par la loi de Poiseuille :

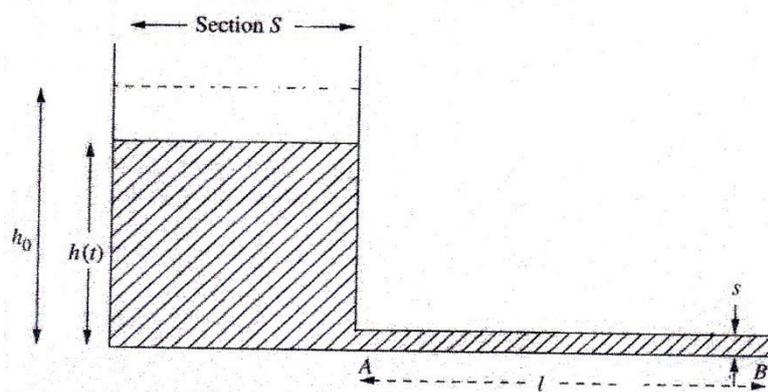
$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{l 8\eta} \text{ où } \Delta P = P_A - P_B \text{ est l'écart de pression entre les extrémités } A \text{ et } B \text{ du tube}$$

cylindrique horizontal. La hauteur du liquide dans le grand vase est $h_0 = 50 \text{ cm}$

à l'instant $t = 0$ et $h(t)$ à l'instant t .

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2} ; s = 5 \text{ mm}^2 ; S = 100 \text{ cm}^2 ; l = 60 \text{ cm} ; \rho = 720 \text{ kg.m}^{-3}.$$

- 1) Le débit volumique du liquide à l'instant t peut-être mis sous la forme : $Q(t) = K.h(t)$
Exprimer le coefficient de proportionnalité K en fonction de g , s , l et ν .
- 2) Etablir l'équation différentielle $h(t)$, et en déduire la loi de vidange $h(t)$.
- 3) a) Au bout du temps $T = 13 \text{ minutes } 30 \text{ secondes}$, la hauteur du dissolvant n'est plus que le tiers de la hauteur initiale h_0 . En déduire la mesure de la viscosité cinématique de ce dissolvant et sa viscosité absolue à la température de 20°C de l'expérience.
b) Calculer le débit volumique Q et le nombre de Reynolds R de l'écoulement dans le tube fin horizontal à l'instant $t = 0$ et à l'instant $t = T$.



Solution :

1) La différence de pression entre les extrémités du tube horizontal est la même qu'entre l'entrée A du tube d'évacuation et la surface libre du liquide à chaque instant:

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho g h(t)$$

Le débit volumique instantané du fluide visqueux est donc d'après la loi de Poiseuille :

$$Q_V = \frac{\Delta p \pi r^4}{l 8 \eta} \Rightarrow Q_V(t) = \frac{\rho g h(t) \pi r^4}{l 8 \eta} = \frac{\rho g \pi r^4}{l 8 \eta} h(t)$$

$$Q_V(t) = K \cdot h(t) \Rightarrow K = \frac{\rho g \pi r^4}{l 8 \eta}$$

Sachant que : $v = \frac{\eta}{\rho}$ et $s = \pi r^2$ on aura : $K = \frac{\rho g \pi s^2}{l 8 v \rho \pi^2} = \frac{g s^2}{l 8 v \pi}$

$$Q_V(t) = \frac{g s^2}{l 8 v \pi} h(t)$$

2) La conservation du débit volumique du fluide s'exprime par :

$$Q_V(t) = -S \frac{dh(t)}{dt} \Rightarrow \frac{g s^2}{l 8 v \pi} h(t) = -S \frac{dh(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} + \frac{g s^2}{l 8 v \pi S} h(t) = 0$$

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{h} = - \int_0^t \frac{g s^2}{l 8 v \pi S} dt$$

$$\text{Ln} \left[\frac{h(t)}{h_0} \right] = - \frac{g s^2}{l 8 v \pi S} t \Rightarrow h(t) = h_0 \exp \left[- \frac{g s^2}{l 8 v \pi S} t \right]$$

La hauteur $h(t)$ du liquide décroît donc exponentiellement au cours du temps.

3) a) A l'instant $t = T$ on a : $h(t) = \frac{h_0}{3}$

$$\frac{h_0}{3} = h_0 \exp \left[-\frac{g}{l} \frac{s^2}{8\nu \pi S} T \right] \Rightarrow 3 = \exp \left[\frac{g}{l} \frac{s^2}{8\nu \pi S} T \right]$$

On en déduit la viscosité cinématique ν :

$$\ln 3 = \frac{g}{l} \frac{s^2}{8\nu \pi S} T \Rightarrow \nu = \frac{g}{l} \frac{s^2}{8\pi S (\ln 3)} T$$

Et sa viscosité dynamique $\eta = \rho \nu$; A.N. $\nu = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $\eta = 8.64 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

b) Le débit volumique est :

$$\text{à l'instant } t=0, Q_V(0) = \frac{g}{l} \frac{s^2}{8\nu \pi} h_0 = 6.78 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\text{à l'instant } t=T, Q_V(T) = \frac{g}{l} \frac{s^2}{8\nu \pi} \frac{h_0}{3} = \frac{Q_V(0)}{3} = 2.26 \text{ cm}^3/\text{s}$$

le nombre de Reynolds dans le tube cylindrique horizontal de rayon r est :

$$Re = \frac{v d}{\nu} = \frac{v 2r}{\nu}$$

$$\text{Avec : } s = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \text{ et } Q_V = s v \Rightarrow v = \frac{Q_V}{s} \text{ donc } Re = \frac{v 2r}{\nu} = \frac{2 Q_V}{\nu \sqrt{\pi s}}$$

$$\text{A l'instant } t = 0, Re(0) = \frac{2 Q_V(0)}{\nu \sqrt{\pi s}} = 2851$$

$$\text{A l'instant } t = T, Re(T) = \frac{2 Q_V(T)}{\nu \sqrt{\pi s}} = 950$$

Exercice 3 :

Un fluide de masse volumique $\rho = 961 \text{ kg/m}^3$ à une vitesse $v=1,5 \text{ m/s}$ dans une conduite horizontale de diamètre $D= 120 \text{ mm}$ à partir d'un réservoir de très grande section ouvert à l'air libre. Sur la partie horizontale de ce tube sont installés deux manomètres distants de $L = 130 \text{ m}$. On relève une chute de pression $\Delta P = P_1 - P_2 = 1,5 \text{ bar}$.

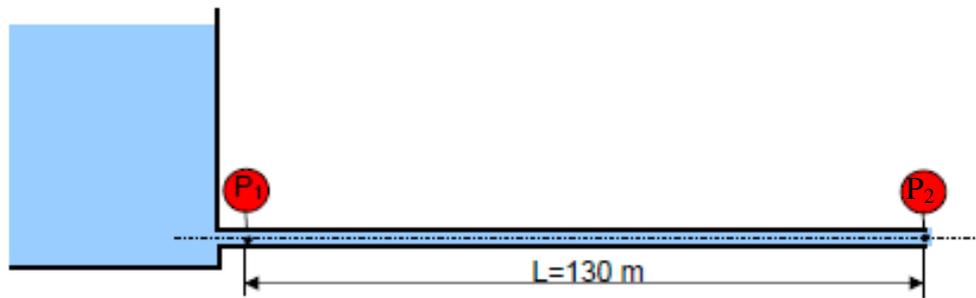
1) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la valeur du coefficient de pertes de charges linéaires λ en fonction de ΔP , ρ , L , D et v .

2) On suppose que l'écoulement est laminaire, Déterminer le nombre de Reynolds en fonction de λ .

3) En déduire la viscosité cinématique du fluide.

4) Quel doit être le diamètre de la conduite qui transporte un fluide à une vitesse de $0,75 \text{ m/s}$ dont la viscosité cinématique est égale au double de celle du fluide initial tout en assurant une similitude dynamique entre les deux écoulements.

5) Que peut on conclure ?



Solution :

1) L'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_r$$

$$p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + \rho g (z_1 - z_2) = \Delta P_r$$

Avec : $p_1 - p_2 = \Delta p$; $v_1 = v_2$; $z_2 = z_1$ et $\Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D}$ (Pa)

On aura donc :

$$\Delta p = \Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \Delta p D}{\rho v^2 L} \Rightarrow A.N. \lambda = 0.128$$

2) Loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{\Delta P_r \pi}{8 \eta L} R^4 \Rightarrow \Delta P_r = \frac{Q 8 \eta L}{\pi R^4} = \frac{v \pi R^2 8 \eta L}{\pi R^4} = \frac{v 8 \eta L}{R^2}$$

$$\Delta P_r = \frac{v 8 \eta L}{R^2} = \frac{v 8 \eta L}{\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{32 v \eta L}{D^2}$$

Le nombre de Reynolds de cet écoulement laminaire s'écrit : $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$

Donc $\Delta P_r = \frac{1}{2} \frac{64}{\frac{\rho v D}{\eta}} \rho v^2 \frac{L}{D} = \frac{64}{Re} \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D}$ (Pa) (Formule de Darcy-Weisbach)

avec $\lambda = \frac{64}{Re} \Rightarrow Re = \frac{64}{\lambda} = 500 < 2000$

3) $Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{v D}{\nu} \Rightarrow v = \frac{v D}{Re} = 36 \cdot 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

4) $Re = Re' \Rightarrow \frac{v D}{\nu} = \frac{v' D'}{\nu'} \Rightarrow D' = \frac{v D \nu'}{v \nu} = 0.48 \text{ m}$.

5) Pour assurer la similitude dynamique de transport des deux fluides, on varie donc les paramètres des fluides en respectant l'égalité des nombres de Reynolds des deux régimes d'écoulement.

Exercice 4 : transport d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique

Du fioul de masse volumique $\rho = 910 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité dynamique η est transporté de A vers B à travers une conduite cylindrique (oléoduc) d'axe horizontal, de longueur $L = 2 \text{ km}$ et de rayon $R = 8 \text{ cm}$, avec un débit volumique $Q = 36 \text{ m}^3/\text{h}$. Les pressions en A et B sont respectivement $P_A = 3 \text{ atmosphères}$ $P_B = 0,4 \text{ atmosphères}$ ($1 \text{ atmosphère} \approx 10^5 \text{ Pa}$).

On admettra le régime d'écoulement permanent et laminaire pour lequel le débit est donné par la formule de Poiseuille :

$$Q = \frac{(P_A - P_B)}{L} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}$$

- 1- Calculer la vitesse moyenne d'écoulement v du fioul.
- 2- Calculer la viscosité dynamique et la viscosité cinématique du fioul transporté.
- 3- Calculer le nombre de Reynolds de cet écoulement et justifier son caractère laminaire.
- 4- Montrer que la puissance P de la pompe de cet oléoduc est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne v (on négligera l'énergie cinétique du fuel-oil) ; calculer P .
- 5- Quel doit - être le rayon R_0 d'une conduite cylindrique qui transporte de l'eau de viscosité cinématique $\nu_0 = 9.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ à la vitesse moyenne 2 m/s pour assurer la similitude dynamique (même régime d'écoulement) de cet écoulement avec celui du fioul étudié.

Solution :

1. Le débit volumique à travers le tuyau cylindrique est :

$$Q_V = S v$$

La vitesse moyenne d'écoulement est :

$$v = \frac{Q_V}{\pi R^2} ; \quad \text{A.N.} \quad v = 0.5 \text{ m/s}$$

2. Le coefficient de viscosité absolu du fioul est d'après la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{(P_A - P_B)}{8\eta L} \cdot \pi R^4 \Rightarrow \eta = \frac{(P_A - P_B)}{8QL} \cdot \pi R^4 ; \quad \text{A.N.} \quad \eta = 0.209 \text{ Pa.s ou Pl}$$

Le coefficient de viscosité cinématique du fioul :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} ; \quad \text{A.N.} \quad \nu = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

3. Le nombre de Reynolds de cet écoulement est :

$$R_e = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{v D}{\nu} ; \quad \text{A.N.} \quad R_e = 348$$

Avec $D = 2 R$: diamètre du tuyau

On a R_e très inférieur à 2000, donc l'écoulement est laminaire.

4. La puissance développée par la pompe pour induire cette différence de pression

$$\text{On a : } p_A - p_B = \frac{\mathcal{P}}{Q} \Rightarrow \mathcal{P} = (p_A - p_B) Q \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{8QL\eta}{\pi R^4} Q = \frac{8L\eta}{\pi R^4} Q^2$$

$$\text{Avec : } Q = v \pi R^2 \Rightarrow \mathcal{P} = 8\pi \eta L v^2 ; \quad \text{A.N. } \mathcal{P} = 2.62 \cdot 10^3 \text{ W}$$

5. La similitude dynamique des deux écoulements impose l'égalité des nombres de Reynolds :

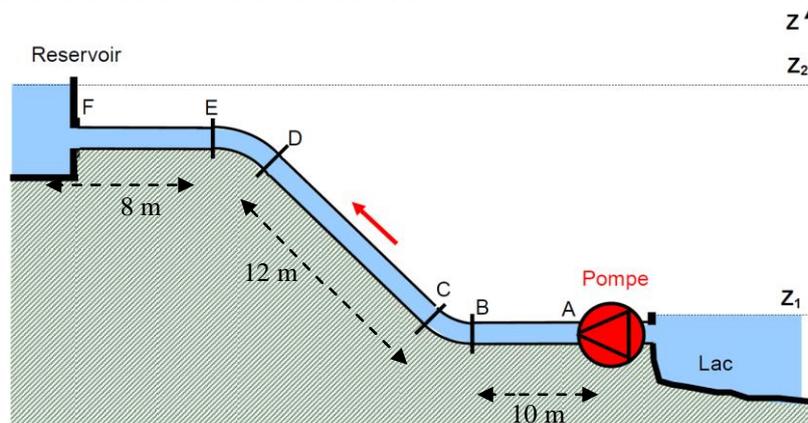
$$R_e(\text{fioul}) = R_e(\text{eau})$$

$$\frac{v D}{\nu}(\text{fioul}) = \frac{v_0 D_0}{\nu_0}(\text{eau}) \Rightarrow \frac{v 2 R}{\nu} = \frac{v_0 2 R_0}{\nu_0} \Rightarrow R_0 = R \frac{v_0}{\nu} \frac{\nu}{v}$$

$$R_0 = 7.82 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Exercice 5 :

Une pompe de débit volumique $Q_v=2 \text{ l/s}$ et de rendement $\gamma = 70 \%$ remonte de l'eau à partir d'un lac jusqu'au réservoir situé sur une colline.



L'eau est acheminée dans une conduite de diamètre $d=130 \text{ mm}$ formée de trois tronçons rectilignes AB, CD, EF, et de deux coudes à 45° : BC et DE : ayant chacun un coefficient de perte de charge $K_s=0,33$. On suppose que :

- les niveaux d'eau varient lentement,
- les niveaux $Z_1=0 \text{ m}$, $Z_2=10 \text{ m}$,
- les pressions $P_1=P_2=P_{atm}$ (pressions à la surface libre du lac et de réservoir respectivement) ;
- la viscosité dynamique de l'eau : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$.
- la masse volumique de l'eau : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$,
- l'accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- 1) Calculer la vitesse v d'écoulement d'eau dans la conduite en m/s.
- 2) Calculer le nombre de Reynolds R_e .
- 3) Préciser la nature de l'écoulement.
- 4) Déterminer le coefficient de pertes de charges linéaires λ .
- 5) Calculer les pertes de charges linéaires.
- 6) Calculer les pertes de charges singulières.
- 7) Déterminer la puissance nette P_n de la pompe en Watt.
- 8) En déduire la puissance P_a absorbée par la pompe.

Solution:

1- $Q = S v = \pi \frac{d^2}{4} v \Rightarrow v = \frac{4Q}{\pi d^2}$ A.N. $v = 0.15 \text{ m/s}$

2. $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$; A.N. $Re = 19500$

3. $2000 < Re < 10^5$; il s'agit d'un écoulement turbulent lisse.

4. Dans ce cas on applique la formule de Blasius pour déterminer le coefficient de perte de charge linéaire :

$$\lambda = (100 Re)^{-0.25} = 0.02674$$

5. Pertes de charge linéaire : $\Delta h_r = \frac{\Delta P_r}{\rho g} = \lambda \frac{1}{2g} v^2 \frac{L}{D} (m) \Rightarrow \Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D} (Pa)$

On a 3 longueurs : L_1 (FE), L_2 (DC), et L_3 (BA)

$$\Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{D} = 92.56 \text{ Pa}$$

6. Perte de charge singulière : $\Delta h_s = K \frac{v^2}{2g} (m) = \frac{\Delta P_s}{\rho g} \Rightarrow \Delta P_s = K \frac{\rho v^2}{2} (Pa)$

On a : 2 coudes (ED) et (CB) de coefficient de pertes de charge singulières :

$$K_s = 0.33$$

On aura alors :

$$\Delta P_s = 2 K_s \frac{\rho v^2}{2} = 7.42 \text{ Pa}$$

7. Equation de Bernoulli généralisée :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \frac{P_n}{Q_v} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_r + \Delta P_s$$

$$p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + \rho g (z_1 - z_2) = -\frac{P_n}{Q_v} + (\Delta P_r + \Delta P_s)$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm} ; v_1 = v_2$$

$$\Rightarrow -\frac{P_n}{Q_v} + (\Delta P_r + \Delta P_s) = \rho g (z_1 - z_2) \Rightarrow \frac{P_n}{Q_v} = (\Delta P_r + \Delta P_s) - \rho g (z_1 - z_2)$$

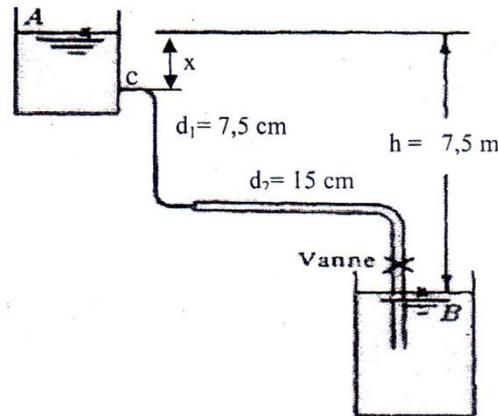
$$P_n = Q_v [(\Delta P_r + \Delta P_s) + \rho g (z_2 - z_1)] = 196.4 \text{ W (Puissance nominale)}$$

8. $P_a = \frac{P_n}{\gamma} = \frac{196.4}{0.7} = 280.57 \text{ W (Puissance absorbée)}$

Exercice 6:

De l'eau à 38°C s'écoule à un régime laminaire par le système représenté dans la Fig. ci-dessous. Les longueurs des tuyaux de 7,5 cm et 15 cm de diamètres en fonte sont respectivement 50 m et 30 m, les facteurs de pertes de charges pour les accessoires et les vannes sont : Coudes de 7,5 cm, $K=0,40$ chacun ; coude de 15cm, $K=0,60$ et vanne de 15 cm, $K=3,0$. On donne : - l'accélération de la pesanteur : $g=9,81 \text{ m/s}^2$; le coefficient des pertes de charges linéaires $\lambda=0,032$.

En négligeant les forces de viscosité dans les récipients, Calculer le débit de l'eau en L/s.



Solution :

On applique la relation de Bernoulli entre A et C :

$$p_A - p_C + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_C^2) + \rho g x = 0$$

On a : $v_A = 0$, et $p_A = p_{atm} \Rightarrow p_{atm} - p_C - \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g x = 0$

On applique la relation de Bernoulli entre C et B :

$$p_C + \rho g z_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \Delta P_r + \Delta P_s$$

$$p_C - p_B + \frac{1}{2} \rho (v_C^2 - v_B^2) + \rho g (h - x) = \Delta P_r + \Delta P_s$$

On a : $p_B = p_{atm}$ et $v_B = 0$

\Rightarrow

$$p_C - p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_C^2 + \rho g (h - x) = \Delta P_r + \Delta P_s$$

$$\Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{L}{D}$$

Dans notre cas : On a deux tuyaux de longueurs L_1 et L_2 et de diamètres D_1 et D_2

$$\Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho (v_1^2 \frac{L_1}{D_1} + v_2^2 \frac{L_2}{D_2})$$

L'équation de continuité donne : $Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{Q}{S_1}$ et $v_2 = \frac{Q}{S_2}$

\Rightarrow

$$\Delta P_r = \lambda \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q^2 L_1}{S_1^2 D_1} + \frac{Q^2 L_2}{S_2^2 D_2} \right) ; \quad A.N. \Delta P_r = 557.54 \cdot 10^6 Q^2$$

$$\Delta P_s = K \frac{\rho v^2}{2} \text{ (Pa)}$$

Dans notre cas : on a : 2 coudes de 7.5 cm : $K_1 = 0.40$

$$\Delta P_s(1) = 2K_1 \rho \frac{v_1^2}{2} = 2K_1 \rho \frac{Q^2}{2S_1^2}$$

Et : un coude de 15 cm ($K_2=0.60$) et une vanne : ($K_3 = 3$) ; donc :

$$\Delta P_s(2) = (K_2 + K_3) \rho \frac{v_2^2}{2} = (K_2 + K_3) \rho \frac{Q^2}{2S_2^2}$$

$$\Delta P_s = 2K_1 \rho \frac{Q^2}{2S_1^2} + (K_2 + K_3) \rho \frac{Q^2}{2S_2^2} ; \quad A.N. \Delta P_s = 26.294 \cdot 10^6 Q^2$$

$$\Delta P_r + \Delta P_s = 583.83 \cdot 10^6 Q^2$$

En additionnant ces deux équations écrites précédemment :

$$p_{atm} - p_c - \frac{1}{2} \rho v_c^2 + \rho g x = 0$$

Et

$$p_c - p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_c^2 + \rho g (h - x) = \Delta P_r + \Delta P_s$$

Il vient :

$$\rho g h = \Delta P_r + \Delta P_s$$

\Rightarrow A.N.

$$583.83 \cdot 10^6 Q^2 = \rho g h \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\rho g h}{583.83 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{10^3 \cdot 9.81 \cdot 7.5}{583.83 \cdot 10^6}} = 11.22 \text{ l/s}$$

Exercice 7

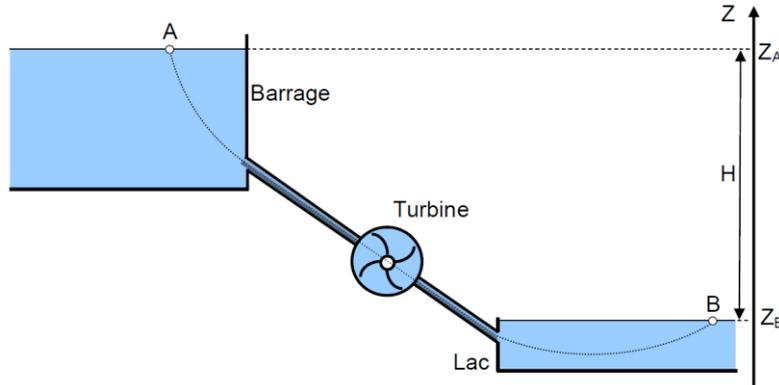
Une conduite cylindrique amène l'eau d'un barrage (dont le niveau Z_A est maintenu constant) dans une turbine.

On branche à la sortie de la turbine une canalisation évacuant l'eau vers un lac.

Le niveau Z_B de la surface libre du lac est supposé constant.

Le débit massique traversant la turbine est $Q_m = 175 \text{ kg/s}$.

On donne : l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ et $H = (Z_A - Z_B) = 35 \text{ m}$.



1) En appliquant le théorème de Bernoulli, déterminer la puissance utile P_u développée dans la turbine. Préciser toutes les hypothèses simplificatrices.

2) Calculer la puissance récupérée sur l'arbre de la turbine si son rendement global est $\eta = 70\%$.

Solution:

1) Appliquons le théorème de Bernoulli entre A et B :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \frac{P_u}{Q_V} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Donc :

$$p_B - p_A + \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g (z_B - z_A) = \frac{P_u}{Q_V}$$

$$p_A = p_B = p_{atm} \text{ et } v_A = v_B = 0$$

$$\Rightarrow P_u = \rho g (z_B - z_A) Q_V = -\rho g H Q_V = -g H Q_m \text{ car } Q_m = \rho Q_V$$

$$P_u = -Q_m g H; \quad |P_u| = Q_m g H; \quad \text{A.N. } P_u = 60025 \text{ W}$$

2) Puissance récupérée sur l'arbre de la turbine : $P_r = P_u \cdot \eta$; A.N. $P_r = 45018 \text{ W}$

Annexe

Formulaire mathématique

1) Opérateurs :

1. L'opérateur Gradient :

L'opérateur gradient est un opérateur différentiel linéaire vectoriel.

Il s'applique à une fonction scalaire $f(\vec{r}, t)$ (champ scalaire fonction de l'espace \vec{r} et du temps t), il se lit gradient ou nabla, noté :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (f(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}, t)$$

Système de coordonnées	$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$
cartésiennes	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
cylindriques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \rho \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$
sphériques	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{r \, d\theta}{\partial f} \\ \frac{\partial f}{r \sin \theta \, d\varphi} \end{array} \right.$

2. L'opérateur Divergence :

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel linéaire scalaire.

Il s'applique à un champ vectoriel exemple $\overrightarrow{A}(\vec{r}, t)$ et donne un champ scalaire.

Il se lit divergence, noté :

$$\text{div } \overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}(\vec{r}, t)$$

Système de coordonnées	$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$
cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho d\rho} + \frac{\partial(A_\varphi)}{\rho d\varphi} + \frac{\partial A_z}{dz}$
sphériques	$\frac{\partial(r^2 A_r)}{r^2 dr} + \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{r \sin \theta d\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r \sin \theta d\varphi}$

3. L'opérateur Rotationnel :

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel linéaire vectoriel.

Il transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel, noté :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}(\vec{r}, t)$$

Système de coordonnées	$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$
cartésiennes	$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$
cylindriques	$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\rho \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{d\rho} \\ \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\rho d\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho d\varphi} \end{cases}$
sphériques	$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{r dr} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{dr} - \frac{\partial A_r}{d\theta} \right) \end{cases}$

4. L'opérateur Laplacien :

L'opérateur laplacien est un opérateur différentiel linéaire qui transforme un champ vectoriel ou scalaire en un champ de même nature.

Il s'obtient en prenant la divergence du gradient, se lit « laplacien » et se note :

$$\Delta(f(\vec{r}, t)) = \nabla^2(f(\vec{r}, t)) \text{ (laplacien scalaire)}$$

$$\text{Ou } \overrightarrow{\Delta A}(\vec{r}, t) = \nabla^2 \overrightarrow{A}(\vec{r}, t) \text{ (laplacien vectoriel)}$$

Système de coordonnées	$\Delta f = \nabla^2 f$
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

2) Théorème de la divergence ou formule d'Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot dS \vec{n} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \, dV$$

S est une surface fermée, \vec{n} est un vecteur normal à la surface et dirigé vers l'extérieur, V le volume délimité par S .

3) Théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \, dS \vec{n}$$

Où C est un circuit fermé orienté, S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour C et \vec{n} un vecteur unitaire normal à S .

4) Propriétés :

Soient f un champ scalaire et soient \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} des champs vectoriels.

Les relations suivantes sont vérifiées:

- 1) $\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}f$
- 2) $\text{rot}(f\vec{A}) = \text{grad}f \wedge \vec{A} + f \text{rot}\vec{A}$
- 3) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$
- 4) $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- 5) $\text{rot}(\text{grad}f) = \vec{0}$ et $\text{div}(\text{rot}\vec{A}) = 0$
- 6) $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B}$

Bibliographie

- 1) Mécanique des fluides 73 problèmes résolus
Hubert LUMBROSO
Dunod 2^{ème} édition 1996

- 2) Mécanique des fluides en 20 fiches
Pascal BIGOT, Richard MAUDUIT, Eric WENNER
Dunod, Paris 2011.

- 3) Mécanique des fluides H prépa
2ème année PC- PC* - PSI-PSI*
Jean Marie BREBEC
Hachette Supérieur

- 4) Exercices de mécanique des fluides
Michel A.MOREL, Jean Pierre LABORDE
Eyrolles.

- 5) Notions de mécanique des fluides
Cours et Exercices corrigés.
Riadh BENHAMOUDA
Centre de Publication Universitaire.