Chapitre 1 : Méthodes du raisonnement mathématique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer de façon rigoureuse, adapté aux phénomènes complexes, ce qui rend les calculs précis et vérifiables. Le raisonnement permet de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer aux autres.

Les objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Connaître les principaux opérateurs et leur propriétés : NON, ET, OU.
- Savoir manipuler adéquatement les quantificateurs.
- Comprendre les notions d'implication et d'équivalence.
- Appliquer toutes ces notions à la démonstration mathématique.
  - Comment structurer proprement un raisonnement.
  - Introduction au raisonnement par l'absurde, par récurrence et à la contraposée.

1. Logique Mathématique

1.1. Assertions

Définition

Une **assertion** est une phrase qui peut être **vraie** ou **fausse** et ne peut pas être les deux en même temps.

Exemple

- $2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.
- $3 \times 2 = 7$ est une assertion fausse.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| = 1$ est une assertion fausse.

1.2. Les opérateurs logiques mathématiques

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

- **L'opérateur logique "et" ($\wedge$) (Conjonction)**

  L'assertion $(P\ et\ Q)$ est **vraie** si P est **vraie** et Q est **vraie**, et elle est **fausse** sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

- $(3 + 5 = 8) \wedge (3 \times 6 = 18)$ est une assertion vraie.
- $(2 + 2 = 4) \wedge (2 \times 3 = 7)$ est une assertion fausse.

- **L'opérateur logique "ou" ($\vee$) (Disjonction)**

L'assertion "**P ou Q**" est **vraie** si l'une des deux assertions **P ou Q** est **vraie**. L'assertion **(P ou Q)** est **fausse** si les deux assertions **P** et **Q** sont **fausses**. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

- $(2 + 2 = 4) \vee (3 \times 2 = 6)$ est une assertion vraie.
- $(2 = 4) \vee (4 \times 3 = 7)$ est une assertion fausse.

- **La négation "non P"** $\overline{P}$

L'assertion $\overline{P}$ est **vraie** si P est **fausse**, et **fausse** si P est **vraie**.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple

La **négation** de l'assertion $3 \geq 0$ est l'assertion $3 < 0$.

- **L'implication** $(\Rightarrow)$

L'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est par définition $(\overline{P}\ ou\ Q)$. Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	P => Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple

- $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ est vraie.
- $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).

- **L'équivalence** $(\Leftrightarrow)$

L'équivalence $(P \Leftrightarrow Q)$ est définie par l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. On dira "P est équivalent à Q " ou "P équivaut à Q" ou "P si et seulement si Q". Cette assertion est **vraie** lorsque P et Q sont **vraies** simultanément ou lorsque P et Q sont **fausses** simultanément. Sa table de vérité est :

P	Q	P <=> Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, l'équivalence $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; y = 0$ est vraie.

Proposition

Soient P, Q et R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :

(1) $P \Leftrightarrow \overline{(\overline{P})}$.

(2) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$.

(3) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.

(4) $(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$.

(5) $(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$.

(6) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

(7) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

(8) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$. L'assertion $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est appelée la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$.

1.3. Quantificateurs

- **Le quantificateur** $"\forall"$ **: « pour tout ou quel que soit»**

  L'assertion $"\forall x \in E, \; P(x)"$ est une assertion vraie lorsque la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble E.

  On lit : « pour tout x appartenant à $E, P(x)$ est vraie ».

Exemple

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

- **Le quantificateur** $"\exists"$ **: « il existe »**

  L'assertion $"\exists x \in E, \; P(x)"$ est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

  On lit :" il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) ".

Exemple

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ est fausse.

"La négation des quantificateurs"

- La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $(\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$.
- La négation de $(\exists x \in E,\ P(x))$ est $(\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$.

Exemple

1. La négation de l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0)$ est l'assertion $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0)$.
2. La négation de l'assertion $(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0)$ est l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0)$.

Remarque

L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0,$

et

$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in R,\ x + y > 0,$

sont différentes.

2. Raisonnements

2.1. Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est vraie . On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple

Montrer que : « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2\ ou\ x = -2$ » est vraie.

On suppose que « $x^2 - 4 = 0$ » est vraie. Est ce que c'est vrai que $x = 2\ ou\ x = -2$?

On a : $x^2 - 4 = 0,$ puis $(x + 2)(x - 2) = 0,$ qui donne $(x + 2) = 0\ ou\ (x - 2) = 0,$ à la fin on obtient : $x = 2\ ou\ x = -2,$ donc c'est vrai.

2.2. Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Donc, si l'on souhaite montrer l'assertion $(P \Rightarrow Q)$, on montre en fait que $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ i.e, si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(x \neq 2\ et\ x \neq -2) \Rightarrow (x^2 \neq 4)$.

Par contraposition ceci est équivalent : $(x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2\ ou\ x = -2)$ qui est vraie d'après l'exemple précédent.

2.3. Raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement est basé sur le fait que pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on en déduit une contradiction.

Exemple

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que : $(x + 3y + xy + 6 = 3) \Rightarrow (x = -3 \ ou \ y = -1)$.

On suppose que $(x + 3y + xy + 6 = 3)$ et on montre $(x \neq -3 \ et \ y \neq -1)$.

On a

$$\begin{array}{rcc} x + 3y + xy + 6 = 3 & \Rightarrow & x + y(3 + x) + 3 = 0, \\ & \Rightarrow & (3 + x)(y + 1) = 0, \\ & \Rightarrow & (3 + x) = 0 \ ou \ (y + 1) = 0, \\ & \Rightarrow & x = -3 \ ou \ y = -1. \end{array}$$

Contradiction avec $(x \neq -3$ et $y \neq -1)$. Donc la proposition "$(x + 3y + xy + 6 = 3) \Rightarrow (x = -3 \ ou \ y = -1)$" est vraie.

2.4. Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type : "$\forall x \in E, P(x)$" est fausse, alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple

Soit la proposition suivante : « $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair » , est une proposition fausse car $n = 3 \in \mathbb{N}$ et 3 est impair. Donc ($n = 3$ est un contre exemple).

2.5. Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

1. On vérifie que $P(0)$ est vraie.
2. On suppose que $P(n)$ vraie jusqu'à l'ordre n, et on démontre alors que l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Pour $n \geq 1$, soit $P(n)$ la propriété $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Étape 1 : $P(1)$ est vraie car pour $n = 1$, on a $1 = \dfrac{1(1 + 1)}{2}$.

Étape 2 : on suppose que $P(n)$ est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons que $P(n + 1)$ (c'est à dire que : $1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1 = \dfrac{(n + 1)(n + 2)}{2}$) est vraie.

On a

$$(1+2+3+\ldots+n)+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}.$$

Ainsi,

$$P(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc, $P(n+1)$ vraie. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(n)$.

3. Exercices

3.1. Énoncés

Exercice 1 :

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $(2<3)$ et $(2\ divise\ 4)$.
2. $(2<3)$ et $(2\ divise\ 5)$.
3. $(2<3)$ ou $(2\ divise\ 5)$.
4. $(2<3)$ et $\overline{(2\ divise\ 5)}$.
5. $\overline{(2<3)}$ ou $(2\ divise\ 5)$.

Exercice 2 :

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $(\Leftrightarrow,\ \Rightarrow)$

1. $\forall x\in\mathbb{R}: x^2=4\quad\ldots\quad x=2$.
2. $\forall z\in\mathbb{C}: z=\overline{z}\quad\ldots\quad z\in\mathbb{R}$.
3. $\forall x\geq 0: x^2=1\quad\ldots\quad x=1$.

Exercice 3 :

Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}: x+y>0$.
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R}: x+y>0$.
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}: x+y>0$.
4. $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}: y^2>x$.

(a) Les assertions $1, 2, 3, 4$ sont-elles vraies ou fausses ?

(b) Donner leurs négations.

Exercice 4 :

Soit $n\in\mathbb{Z}$. Énoncer et démontrer la contraposée de l'assertion suivante : Si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 5 :

Montrer que : $1^1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

3.2. Correction des exercices

Solution 1 :

1. $(2 < 3)$ est vraie et $(2\ divise\ 4)$ est vraie donc "$(2 < 3)\ et\ (2\ divise\ 4)$" est vraie.
2. $(2 < 3)$ est vraie et $(2\ divise\ 5)$ est fausse, l'une des deux est fausse donc "$(2 < 3)$ et $(2\ divise\ 5)$" est fausse.
3. $(2 < 3)$ est vraie et $(2\ divise\ 5)$ est fausse, l'une des deux est vraie donc "$(2 < 3)$ ou $(2\ divise\ 5)$" est vraie.
4. $(2 < 3)$ est vraie et $\overline{(2\ divise\ 5)}$ est vraie, les deux sont vraies donc "$(2 < 3)$ et $\overline{(2\ divise\ 5)}$" est vraie.
5. $(2 < 3)$ est vraie donc $\overline{(2 < 3)}$ est fausse et $(2\ divise\ 5)$ est fausse par conséquent $\overline{(2 < 3)}$ ou $(2\ divise\ 5)$ est fausse car les deux assertions sont fausses.

Solution 2 :

Le connecteur logique sur les assertion suivante :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \ \Rightarrow x = 2.$
2. $\forall z \in \mathbb{C} : z = \overline{z} \ \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$
3. $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \ \Leftrightarrow x = 1.$

Solution 3 :

1) L'assertion est fausse. Car, pour $y = -x \in \mathbb{R}$, on a $x + y = x - x = 0 \not> 0.$

2) L'assertion est vraie. Car, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0.$

La négation de (2) est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$.

3) L'assertion est fausse, par exemple x = −1, y = 0.

La négation de (3) est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$

4) L'assertion est fausse. Cr, pour $y = x$. on trouve $x^2 \not> x$.