1.2. Correction des exercices

Solution 1 :

1. $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \; divise \; 4)$ est vraie donc <$(2 < 3) \; et \; (2 \; divise \; 4)$> est vraie.
2. $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \; divise \; 5)$ est fausse, l'une des deux est fausse donc $(2 < 3)$ et $(2 \; divise \; 5)$ est fausse.
3. $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \; divise \; 5)$ est fausse, l'une des deux est vraie donc $(2 < 3)$ ou $(2 \; divise \; 5)$ est vraie.
4. $(2 < 3)$ est vraie et $\overline{(2 \; divise \; 5)}$est vraie, les deux sont vraies donc $(2 < 3)$ et $\overline{(2 \; divise \; 5)}$ est vraie.
5. $(2 < 3)$ est vraie donc $\overline{(2 < 3)}$ est fausse et $(2 \; divise \; 5)$ est fausse par conséquent ou $(2 \; divise \; 5)$ est fausse car les deux assertions sont fausses.

Solution 2 :

Le connecteur logique sur les assertion suivante :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \; \Rightarrow x = 2.$
2. $\forall x \in \mathbb{C} : z = \overline{z} \; \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$
3. $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \; \Leftrightarrow x = 1.$

Solution 3 :

1) est fausse. Car sa négation qui est : $\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ est vraie.

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y < 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors

$x + y = -1 < 0.$

2) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0.$

La négation de (2) est :$\exists x \in \mathbb{R}, \; \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$.

3) est fausse, par exemple x = −1, y = 0.

La négation de (3) est : $\exists x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$

4) est vraie, on peut prendre $x = -1.$

La négation de (4) est : $\forall x \in \mathbb{R}, \; \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x.$

Solution 4 :

Soit n un entier. Montrons l'assertion suivante :

$$\text{Si } n^2 \text{ est impair, alors } n \text{ est impair.}$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k+1\right)}_{P} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m+1\right)}_{Q}.$$

La contraposée de l'assertion est :

$$\text{Si } n \text{ est pair, alors } n^2 \text{ est pair,}$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{\left(\exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\right)}_{\overline{Q}} \Rightarrow \underbrace{\left(\exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k\right)}_{\overline{P}}.$$

En effet, s'il existe $m \in \mathbb{N} : n = 2m$, alors

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2\left(2m^2\right) = 2k,$$

donc n^2 est pair. Par le principe de contraposition, on a démontré l'assertion de l'énoncé.

Solution 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose l'assertion suivante :

$$P(n) : 1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

$P(1) : 1^1 = \frac{1}{6} 1 (1+1)(2+1)$ est vraie .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} 1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

Ce qui prouve $P(n+1)$.
Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.