Mathématiques 1

Dr. Ilhem KADRI

Université Oran 1 "Ahmed Ben Bella"

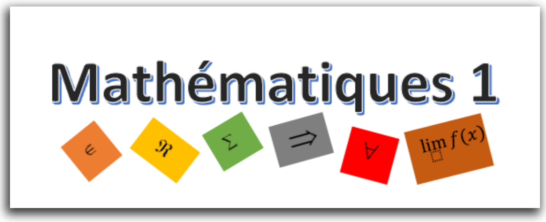
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées

Domaine Sciences et Technologie "ST"

Département de Mathématiques

Email : kadri.ilhem@univ-oran1.dz

10-09-2023



2023-2024

Table des matières

Chapitre 2 : Les ensembles, les relations et les applications

La plupart des notions présentées dans ce chapitre sont déjà connues par les étudiants. Notre but est donc de préciser le vocabulaire et les notations qui seront utilisées dans tout le cours.

Les objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Connaître le vocabulaire relatif à la théorie des ensembles.
- Montrer qu'une application est injective, surjective ou bijective.
- Étudier les propriétés des fonctions caractéristiques et les relations binaires.
- Maîtriser le lien avec le concept de fonction, les notions d'injectivité, de surjectivité, de bijection, d'image direct et d'image réciproque, de composition et d'inversion.

1. Théorie des ensembles

1.1. Généralités

Définition

Un ensemble est une collection d'éléments.

Parmi les ensembles, un cas particulier, est l'ensemble vide, notée $\emptyset$ ou $\{\ \}$ (l'ensemble qui ne contient aucun élément).

Soit E un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le contraire.

Exemple

On a

$\{0, 1\}, \{rouge,\ noir\}$ et $\{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$ sont des ensembles, alors $0 \in \{0, 1\}$ et $2 \notin \{0, 1\}$.

Remarque

Pour définir un ensemble :

- On connaît la liste de tous ses éléments, on dit que l'ensemble est donné par **"Extension"**.

  Par exemple, Soit $A = \{0, 1, 2\}$ alors, A est défini par extension, car on connaît tous ses éléments.

- On connaît seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent des les retrouver tous, on dit que l'ensemble est donné par **"Compréhension"**.

  Par exemple, soit $B = \{n \in \mathbb{N} : n\ est\ impair\ \}$ alors B est défini par compréhension.

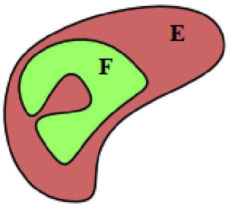
1.2. Inclusion, union, intersection, complémentaire

"Inclusion" ***Définition***

Un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E, si tout élément de F est un élément de E et on écrit $F \subset E$.

Autrement dit : $F \subset E \Leftrightarrow \forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$.

On dit alors que F est un sous-ensemble de E ou une partie de E.



Exemple

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition

Deux ensembles E et F sont **égaux** $(E = F)$ si et seulement si chacun est inclus dans l'autre, c'est-à-dire : $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition

Soit E un ensemble, on forme un ensemble appelé **ensemble des parties** de E, noté $P(E)$ qui est caractérisé par la relation suivante :

$P(E) = \{A : A \subset E\}$.

Exemple

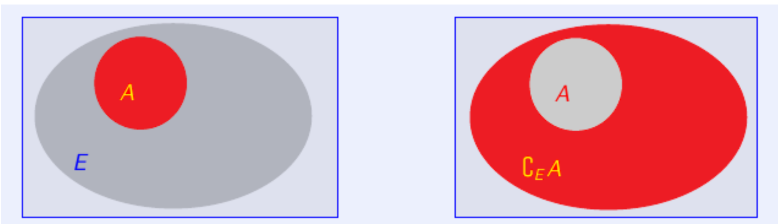
Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors : $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Remarque

Si $E = \emptyset$ alors $P(E) = \{\emptyset\}$.

"Complémentaire" ***Définition***

Soit E un ensemble et soit $A \subset E$, on appelle **complémentaire** de A dans E, noté : $C_E A$ ou A^c ou $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire : $A^c = C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$.

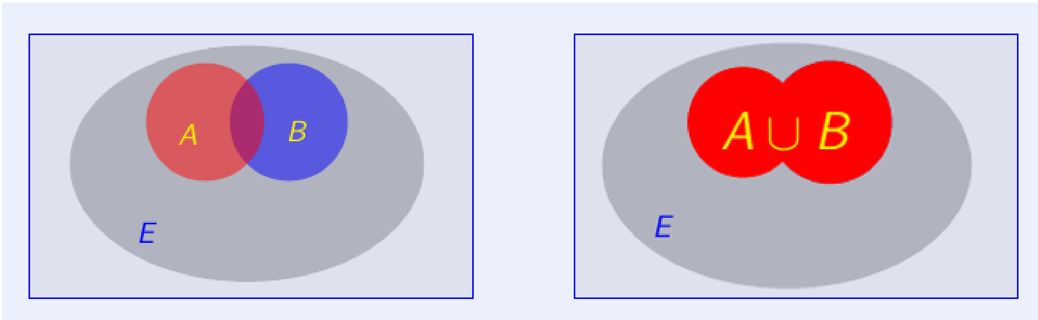


Exemple

Soient $E = \{a, b, 1, 2, 3\}$, $A = \{a, 1\}$, alors $A^c = \{b, 2, 3\}$.

"Union" — **Définition**

On appelle **réunion** des deux ensembles A et B, noté $A \cup B$ l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A ou à B, c'est-à-dire : $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$.



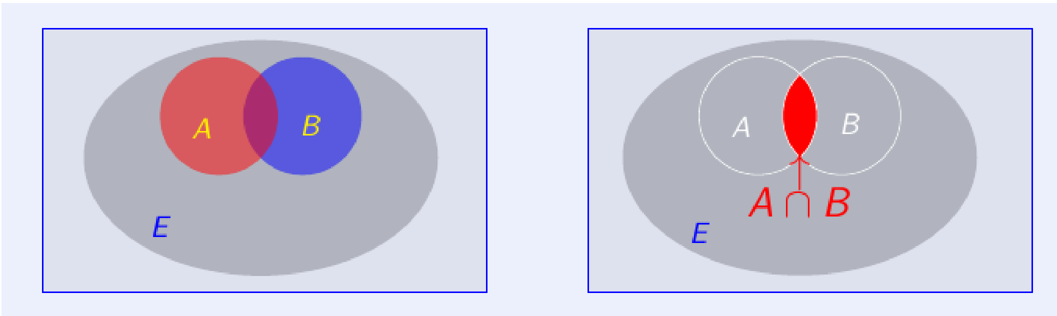
Complément

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E, alors il est clair que :

- **Commutativité** : $A \cup B = B \cup A$.
- **Associativité** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.
- $A \cup \emptyset = A$.
- $A \cup A^c = E$ et $A \cup E = E$.

"Intersection" — **Définition**

On appelle **intersection** des deux ensembles A et B, noté $A \cap B$ l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A et à B, c'est-à-dire : $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ } et \text{ } x \in B\}$.



Complément

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E, alors il est clair que :

- **Commutativité** : $A \cap B = B \cap A$.
- **Associativité** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cap E = A$.

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$, alors : $A \cap B = \{2, 3\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Définition

Soit E un ensemble, on dit que l'ensemble E est **fini** si le nombre d'éléments de E est fini.

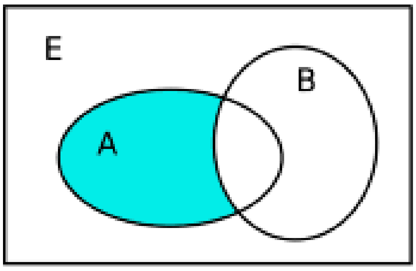
Le nombre d'éléments de E s'appelle le **cardinal** de E, noté $Card\ (E)$.

Exemple

- $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
- Si $E = \{0, 1, 2, 3\}$, alors $Card\ (E) = 4$. D'où E est fini.

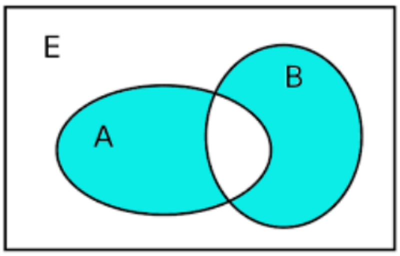
"Différence" ***Définition***

Soit E un ensemble, on appelle **différence** de A et B, noté $A \backslash B$; l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire : $A \backslash B = \{x \in A\ :\ x \notin B\}$.



"Différence symétrique" ***Définition***

On appelle **différence symétrique** de A et B, noté $A \Delta B$; l'ensemble formé des éléments x qui appartiennent à $A \cup B$ et n'appartiennent pas à $A \cap B$, c'est-à-dire : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.



Exemple

Si $E = \mathbb{R}, A = [0, 1]$ et $B =]0, +\infty[$, alors : $A \backslash B = \{0\}, B \backslash A =]1, +\infty[$ et $A \Delta B = \{0\} \cup]1, +\infty[$.

Proposition

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E, alors :

- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- **Distributivité** : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}(x\in A\cap(B\cup C)) &\Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B\cup C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ et } (x\in B \text{ ou } x\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x\in A \text{ et } x\in B) \text{ ou } (x\in A \text{ et } x\in C))\\ &\Leftrightarrow (x\in A\cap B \text{ ou } x\in A\cap C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C),\end{aligned}$$

alors $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

$$\begin{aligned}(x\in A\cup(B\cap C)) &\Leftrightarrow (x\in A \text{ ou } x\in B\cap C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\in C))\\ &\Leftrightarrow ((x\in A \text{ ou } x\in B) \text{ et } (x\in A \text{ ou } x\in C))\\ &\Leftrightarrow (x\in A\cup B \text{ et } x\in A\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C),\end{aligned}$$

alots $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Proposition : "Loi de Morgan"

Soient A et B des parties d'un ensemble E, alors :

- $C_E(A\cap B)=C_E(A)\cup C_E(B)$.
- $C_E(A\cup B)=C_E(A)\cap C_E(B)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}(x\in C_E(A\cap B)) &\Leftrightarrow (x\notin A\cap B)\Leftrightarrow(\overline{x\in A\cap B})\\ &\Leftrightarrow \overline{(x\in A \text{ et } x\in B)}\Leftrightarrow(x\notin A \text{ ou } x\notin B)\\ &\Leftrightarrow (x\in C_E(A) \text{ ou } x\in C_E(B))\Leftrightarrow x\in C_E(A)\cup C_E(B),\end{aligned}$$

donc $C_E(A\cap B)=C_E(A)\cup C_E(B)$.

$$\begin{aligned}(x\in C_E(A\cup B)) &\Leftrightarrow (x\notin A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A \text{ et } x\notin B\\ &\Leftrightarrow (x\in C_E(A) \text{ et } x\in C_E(B))\Leftrightarrow x\in C_E(A)\cap C_E(B),\end{aligned}$$

donc $C_E(A\cup B)=C_E(A)\cap C_E(B)$.

Remarque

Soit A un sous ensemble de E, alors $C_E(C_E(A))=A$. En effet,

$$\begin{aligned}(x\in C_E(C_E(A))) &\Leftrightarrow (x\notin C_E(A))\Leftrightarrow\overline{(x\in C_E(A))}\\ &\Leftrightarrow \overline{(x\notin A)}\Leftrightarrow(x\in A).\end{aligned}$$

1.3. Produit cartésien

Définition

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F, noté $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$E \times F = \{(x, y) : x \in E \; et \; y \in F\}$.

Exemple

1. Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 5\}$, alors :
   $E \times F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$.
   $F \times E = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\} \neq E \times F$.
2. Si $E = \{0\}$ et $F = \{0\}$, alors $E \times F = \{(0, 0)\}$.

Notation

On note E^2 le carré cartésien $E \times E$. Plus généralement, on définit le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$ par :

$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in E_i, \forall \; i = 1, ..., n\}$.

Par exemple,

1. Si $E = \{1, 2\}$, alors :
   $E^2 = E \times E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
   $E^3 = E^2 \times E = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 2)\}$.
2. Si $E = \mathbb{R}$, alors :
   $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y), \; x \in \mathbb{R} \; et \; y \in \mathbb{R}\}$.

2. Relations d'ordre, Relations d'équivalence

2.1. Relations binaires

Définition

Une **relation binaire** sur un ensemble E est définie par la donnée du triplet (E, E, Γ), Γ étant une partie de $E \times E$. On écrit $x \mathfrak{R} y$ ou $(x, y) \in \Gamma$ pour exprimer que x est en relation $\mathfrak{R}$ avec y.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x - y \geq 0, \forall x, \; y \in \mathbb{R}$.

Définition

Soit $\mathfrak{R}$ une **relation binaire** sur un ensemble E. On dit que $\mathfrak{R}$ est :

1. **Réflexive**, si chaque élément est en relation avec lui même, c'est à dire : $x \mathfrak{R} x, \; \forall x \in E$.
2. **Symétrique**, si pour tous $x, \; y \in E$, si x est en relation avec y alors y est en relation avec x, c'est à dire : $x \mathfrak{R} y \Rightarrow y \mathfrak{R} x, \; \forall x, \; y \in E$.

3. **Transitive**, si pour tous $x,\ y,\ z \in E$, si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z, c'est à dire :

   $(x\mathfrak{R}y\ \ et\ \ y\mathfrak{R}z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z,\ \forall x,\ y,\ z \in E.$
4. **Anti-symétrique**, si deux éléments sont à la fois en relation l'un avec l'autre, alors ils sont égaux, c'est à dire :

   $(x\mathfrak{R}y\ \ et\ \ y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y,\ \forall x,\ y \in E.$

2.2. Relation d'équivalence

Définition

Une **relation binaire** $\mathfrak{R}$ sur E est une **relation d'équivalence** si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur E. On appelle **classe d'équivalence** de $x \in E$, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par $\mathfrak{R}$, noté $\dot{x}$ ou $cl\ (x)$ ou bien $C(x)$:

$C(x) = \{y \in E\ :\ y\mathfrak{R}x\}.$

La classe d'équivalence $C(x)$ est non vide car comme $\mathfrak{R}$ est réflexive et contient de ce fait au moins x.

On notera par : $E/\mathfrak{R} = \{C(x)\ :\ x \in E\}.$

L'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation $\mathfrak{R}$ qui est appelé espace quotient.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$

Cette relation est bien une relation d'équivalence. En effet,

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

  $x - x = 0$ or $0 \in \mathbb{Z}$, donc $x - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathfrak{R}$ est une relation réflexive.
- Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$, on a

  $(x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (y\mathfrak{R}x),$

  alors, $\mathfrak{R}$ est une relation symétrique.
- Soient $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, on a

  $$\begin{aligned} (x\mathfrak{R}y\ \ et\ \ y\mathfrak{R}z) &\Rightarrow (x - y \in \mathbb{Z}\ \ et\ \ y - z \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (x - y + y - z \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (x - z \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (x\mathfrak{R}z), \end{aligned}$$

  alors $\mathfrak{R}$ est une relation transitive.

2.3. Relation d'ordre

Définition

Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur E est dite **une relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation x divise y, c'est à dire

$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx, \ \forall x, \ y \in \mathbb{N}^*.$

Alors,

- Soit $x \in \mathbb{N}^*$, on a $x = 1 \cdot x$, donc $x = k \cdot x$ i.e $x\mathfrak{R}x$.
- Soient $x, \ y, \ z \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise z, i.e $\exists k_1 \in \mathbb{N}^*, \ \exists k_2 \in \mathbb{N}^* \ / \ y = k_1 x \ \ et \ \ z = k_2 y \ \Rightarrow z = k_1 k_2 x$, i.e $x\mathfrak{R}z$.
  - *Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise x, alors*

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : y = k_1 x \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : x = k_2 y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \ x = k_2 k_1 x \\ \Rightarrow \ x(1 - k_2 k_1) = 0 \\ \Rightarrow \ k_2 k_1 = 1, \ car \ x \neq 0, \end{array}$$

il vient que $k_2 k_1 = 1$, comme $k_2, k_1 \in \mathbb{N}^*$, alors $k_2 = k_1 = 1$, c'est-à-dire $x = y$, ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation anti-ymétrique.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

L'ordre total et l'ordre partiel — **Définition**

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre définie sur un ensemble E, on dit que l'ordre $\mathfrak{R}$ est **totale**, si deux éléments quelconque de E sont comparables i.e, pour tout $x, y \in E$, on a : $x\mathfrak{R}y$ ou $y\mathfrak{R}x$.

Sinon, on dit que l'ordre $\mathfrak{R}$ est **partielle** si elle n'est pas totale, c'est-à-dire : $\exists \ x, \ y \in E : \ ni \ \ x\mathfrak{R}y \ \ \ et \ \ \ ni \ \ y\mathfrak{R}x.$

Exemple

Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists \ n \in \mathbb{N} : y = nx.$

Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a ni $x\mathfrak{R}y$ ni $y\mathfrak{R}x$, alors $\mathfrak{R}$ est un ordre partiel.

3. Les applications

3.1. Définition d'une application

Définition

Soient E et F des ensembles donnés, on appelle **application** de E dans F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui associe à tout élément de E un et seul élément de F, on écrit :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$

- L'ensemble E est dit **ensemble de départ** et F est dit **ensemble d'arrivée**.
- L'élément x est dit **l' antécédent** et $y = f(x)$ est dit **l'image** de x par f.
- L'application f est dite **fonction** si, pour chaque $x \in E$, il existe au plus $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \ \rightarrow \mathbb{C}$, tel que $f(n) = n + ie^n$, alors f est une application, avec $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{C}$.

"Domaine de définition" ***Définition***

Soient E, F deux ensembles quelconque et $f : E \to F$ une fonction. On appelle **domaine de définition** de f, noté D_f l'ensemble des éléments $x \in E$ au quels il existe un unique élément $y \in F$, telle que $y = f(x)$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, alors

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$.

"Graphe" ***Définition***

Soient E et F des ensembles donnés. **Le graphe** d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble donné par : $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F$.

"Égalité" ***Définition***

Soient $f, g : E \to F$ deux applications. On dit que f, g sont **égales** si et seulement si : $\forall x \in E : f(x) = g(x)$. On écrit alors $f = g$.

"Composition" ***Définition***

Soient E, F et G trois ensembles et f et g deux applications telles que :

$$E \overset{f}{\to} F \overset{g}{\to} G$$

On peut définir une application de E dans G notée $g \circ f$ et appelée **application composée** de f et g par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pour tout $x \in E$.

Définition

Soit E un ensemble, on appelle application identité, notée $id : E \to E$ l'application qui à x associe $id(x) = x, \forall x \in E$.

Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$et $g : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ définies par

$f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Alors, $g \circ f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ est donnée par

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

"Restriction" ***Définition***

Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$ une application. On appelle **restriction** de f à A, l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par : $f_{|A}(x) = f(x)$, pour tout $x \in A$.

"Prolongement" ***Définition***

Soient $E,\ F,\ G$ des ensembles tels que $E \subset G$ et $f : E \to F$ une application. On appelle **prolongement** de f à G, toute application g de G vers F dont la restriction à E est f.

3.2. Image direct, image réciproque

"Image direct" ***Définition***

Soient $E,\ F$ des ensembles et $A \subset E$ et $f : E \to F$ une application. **L'image directe** de A par f est l'ensemble :

$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset F.$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $A = [0, 1]$, alors

$f([0, 1]) = \{f(x) : x \in [0, 1]\} = \{2x + 1 : x \in [0, 1]\}.$

On a $x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3$, donc $f([0, 1)] = [1, 3]$.

"Image réciproque" ***Définition***

Soient $E,\ F$ deux ensembles et $B \subset F$ et $f : E \to F$ une application. **L'image réciproque** de B par f est l'ensemble : $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} \subset E.$

Exemple

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par $f(x) = x^2$, alors

$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x| \leq 1\} = [-1, 1].$

- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(\pi x)$, alors

$g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) = 0\} = \{x : x = k,\ avec\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$

Proposition

Soient E, F deux ensembles quelconques et f une application $f : E \to F$. Pour tous $A,\ B \subset E$ et $X,\ Y \subset F$, on a les propriétés suivantes

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ et $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
4. $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(X)) \subset X$.

3.3. Application injective, surjective, bijective

"Injection" ***Définition***

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **injective** si et seulement si :

$\forall x_1,\ x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Exemple

Soit $f\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ l'application définie par $f(x)=x^2$, alors f est injective. En effet,

soient $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}^+$ tels que : $f(x_1)=f(x_2)$,

$x_1^2=x_2^2\Rightarrow\ \sqrt{x_1^2}=\ \sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|=x_1=x_2$, car $x_1,\ \ x_2\in\mathbb{R}^+$.

"Surjection" ***Définition***

Soit $f:E\to F$ une application. On dit que f est **surjective** si et seulement si : pour tout $y\in F$, il existe au moins $x\in E$ tel que $f(x)=y$, i.e : $\forall y\in F,\ \exists x\in E\ :\ y=f(x)$.

Exemple

Soit $f\ :\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ l'application définie par $f(x)=|x|$, alors f est surjective. En effet,

Soit $y\in\mathbb{N}$, pour $x=y$ (ou $x=-y$), on a :

$x\in\mathbb{Z}$ et $f(x)=y\Leftrightarrow y=|x|\Leftrightarrow x=\pm y$, donc $\forall y\in\mathbb{N}\,\exists\ x=\pm y\in\mathbb{Z}/\ y=f(x)$.

"Bijection" ***Définition***

Soit $f:E\to F$ une application. On dit que f est **bijective** (ou f est une bijection de E sur F) si et seulement si f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y\in F$ il existe un unique $x\in E$ tel que $y=f(x)$.

Autrement dit : $\forall y\in F,\ \exists!\ x\in E\ :\ y=f(x)$.

Exemple

Soit $f\ :\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ l'application définie par $f(x)=x-7$, alors f est bijective.

En effet, soit $y\in Z$, on a

$f(x)=y\Rightarrow x=y+7$. donc il existe un unique x dans $\mathbb{Z}$ tel que $y=f(x)$.

"Application réciproque" ***Définition***

Soit $f:E\to F$ une application bijective. On définit l'application $f^{-1}:F\to E$, appelée **application réciproque** de f, par : $f^{-1}(x)=y$ si et seulement si $f(y)=x$.

Exemple

Soit $f\ \ :\mathbb{R}^+\to\ [1,+\infty[$ l'application définie par $f(x)=x^2+1$, alors f est bijective, car

pour tout $y\in[1,+\infty[$, l'équation $y=f(x)$ admet une unique solution $x=\ \sqrt{y-1}$.

L'application réciproque est $f^{-1}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ définie par : $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$, pour tout $x\in[1,+\infty[$.

Proposition

Soient $E,\ F$ deuxs ensembles et $f:E\to F$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g:F\to E$ telle que : $f\circ g=id_F$ et $g\circ f=id_E$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f est bijective, son application réciproque est $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x)$.

On a

$f \circ g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que

$(f \circ g)(x) = e^{\ln(x)} = x = id_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ et $(g \circ f)(x) = \ln(e^x) = x = id_{\mathbb{R}}(x)$.

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa fonction réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. Exercices

Exercice 1 :

(1) *On considère les ensembles suivants :*

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Décrire les ensembles suivants et leurs cardinaux :

$$A \cap B, \quad A \backslash B, \quad A \Delta B, \quad D \times C, \quad B \cap C, \quad C_D A, \quad D \cup A, \quad \mathcal{P}(C).$$

(2) *Décrire les ensembles suivants :*

$$F = [-2, 1[\cap]-\infty, 0], \quad E = [-2, 1[\cup]-\infty, 0], \quad G = [-2, 1[\Delta]-\infty, 0], \quad H = C_{\mathbb{R}} F.$$

Exercice 2 :

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

(1) Montrer que : $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

(2) Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 0)$.*

(3) *Même questions pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x_1, y_1) \, \mathcal{R} \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre*

(2) *L'ordre est il total ?*

Exercice 5 :

Dans $\mathbb{R}^2$ *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

(1) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de* $(0, 0)$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:* $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

(1) f *est-elle injective? surjective ?*

(2) *Montrer que la restriction* $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ *est une bijection.*

Exercice 7 :

Soit f *l'application de* $[0, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$ *définie par*

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - 1.$$

(1) *Montrer que* f *est bijective.*

(2) *Déterminer sa fonction réciproque* f^{-1}.

Bibliographie

[1] A. Hitta, Cours d'Algèbre et Exercices Corriges, Édition OPU, Algérie, 2006.

[10] K. Allab, Éléments d'Analyse, Fonction d'une variable réelle, Édition OPU, Algérie, 1984.

[2] J. Rivaud, Exercices d'Analyse, Tome 1, Édition Vuibert, 1971.

[3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs, Librairie Armand Colin (1977).

[4] N. Basbois et P. Abbrugiati, Algèbre Exercices corrigés, 2 éme édition, 2016.

[5] E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, "Les mathématiques en licence", Tomes 1 à 4, Edi Science.

[6] J. Dixmier, "Cours de mathématiques", Cycle préparatoire, 2 volumes, Dunod.

[7] J. M. Monier, "Analyse", PCDI-PTSI, Dunod, 2003.

[8] J. M. Monier, "Algèbre", MPSI, Dunod, 2006.

[9] S. Balac, F. Sturm, "Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, PPUR presses polytechniques, 2003.