Proposition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est :

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. Exercices

4.1. Énonces

Exercice 1 :

(1) *On considère les ensembles suivants :*

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Décrire les ensembles suivants et leurs cardinaux :

$$A \cap B, \quad A \backslash B, \quad A \Delta B, \quad D \times C, \quad B \cap C, \quad C_D A, \quad D \cup A, \quad \mathcal{P}(C).$$

(2) *Décrire les ensembles suivants :*

$$F = [-2, 1[\cap]-\infty, 0], \quad E = [-2, 1[\cup]-\infty, 0], \quad G = [-2, 1[\Delta]-\infty, 0], \quad H = C_{\mathbb{R}} F.$$

Exercice 2 :

Exercice *Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.*

(1) Montrer que : $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

(2) Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 3 :

Exercice *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 0)$.*

(3) *Même questions pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$(x_1, y_1)\, \mathcal{R}\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Exercice 4 :

Exercice *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

(1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre*

(2) *L'ordre est il total ?*

Exercice 5 :

Exercice *Dans* $\mathbb{R}^2$ *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

(1) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *Déterminer la classe d'équivalence de* $(0,0)$.

Exercice 6 :

Exercice

(1) *Montrer que les fonctions suivantes sont des applications puis vérifier si elle sont injectives, surjectives ou bijectives :*

$$v: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \to n^2 \end{array}, \qquad i: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ n \to 2n^2 - 7 \end{array}, \qquad k: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \to 4n^2 + 5 \end{array},$$

$$f: \begin{array}{l} [-1,1] \to [0,1] \\ x \to \sqrt{1-x^2} \end{array}, \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{2-x}{x+3} \end{array}, \qquad h: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{array}.$$

(2) *Calculer* $v \circ k$, $i \circ k$, $k \circ i$.

(3) *Montrer que l'application* $u :]1, \infty[\to]0, \infty[$ *définie par :* $u(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *est bijective et calculer sa bijection réciproque.*

Exercice 7 :

Exercice *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:* $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) f *est-elle injective? surjective ?*

(2) *Montrer que la restriction* $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ *est une bijection.*

Exercice 8 :

Exercice *Soit* f *l'application de* $[0, +\infty[$ *dans* $[0, +\infty[$ *définie par*

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 - 1.$$

(1) *Montrer que* f *est bijective.*

(2) *Déterminer sa fonction réciproque* f^{-1}.