4.2. Correction des exercices

Solution de l'exercice 1 :

Solution 8.

(1) *On a*

$$A=\{1,3,7,9,12\}, \quad B=\{1,3,2\}, \quad C=\{3,4,7,9\}, \quad D=\{3,1\}.$$

Alors

$$A\cap B=\{1,3\},\ Card\,(A\cap B)=2,\ A\backslash B=\{7,9,12\},\ Card\,(A\backslash B)=3,$$

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{1,3,2,7,9,12\}\setminus\{1,3\}=\{2,7,9,12\},\ Card\,(A\Delta B)=4,$$

$$D\times C=\{3,1\}\times\{3,4,7,9\}=\{(3,3),(3,4),(3,7),(3,9),(1,3),(1,4),(1,7),(1,9)\},$$

$$Card\,(D\times C)=8, B\cap C=\{3\},\ Card\,(B\cap C)=3,$$

$$C_AD=\{7,9,12\}, Card\,(C_AD)=3, D\cup A=A, Card\,(D\cup A)=5,$$

$$\mathcal{P}(C)=\left\{\begin{array}{c}\emptyset,\{3\},\{4\},\{7\},\{9\},\{3,4\},\{3,7\},\{3,9\},\{4,7\},\{4,9\},\{7,9\}\\ \{3,4,7\},\{3,4,9\},\{3,7,9\},\{4,7,9\},\{3,4,7,9\}\end{array}\right\},$$

$$Card\,(\mathcal{P}(C))=2^{Card(C)}=2^4=16.$$

(2) *On a,*

$$\begin{array}{l} F=[-2,1[\cap]-\infty,0]=[-2,0],\\ E=[-2,1[\cup]-\infty,0]=]-\infty,1[,\\ G=[-2,1[\Delta]-\infty,0]=]-\infty,1[\setminus[-2,0]=]-\infty,-2[\cup]0,1[,\\ H=C_{\mathbb{R}}F=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[.\end{array}$$

Solution de l'exercice 2 :

(1) *Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, alors*

$$(A\backslash B)\setminus C=(A\backslash B)\cap C_EC=(A\cap C_EB)\cap C_EC,$$

et

$$\begin{aligned} A\setminus(B\cup C) &= A\cap C_E(B\cup C)=A\cap(C_EB\cap C_EC)\\ &= (A\cap C_EB)\cap C_EC\\ &= (A\backslash B)\setminus C.\end{aligned}$$

(2) *On a $A\cup B\subset A\cup C$ et $A\cap B\subset A\cap C$. Soit $x\in B$, montrons que $x\in C$. En effet*

$$\begin{aligned}(x\in B) &\Rightarrow (x\in A\cup B\subset A\cup C)\Rightarrow(x\subset A\cup C)\\ &\Rightarrow (x\in A \text{ ou } x\in C).\end{aligned}$$

Si $x\in C$, alors on a fini. Si $x\in A$, alors

$$(x\in A\cap B\subset A\cap C)\Rightarrow(x\in A\cap C)\Rightarrow(x\in C),$$

donc $x\in C$, d'où $B\subset C$.

Solution de l'exercice 3 :

(1) *Soit* A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E, *alors*

$$(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash B) \cap C_E C = (A \cap C_E B) \cap C_E C,$$

et

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cup C) &= A \cap C_E (B \cup C) = A \cap (C_E B \cap C_E C) \\ &= (A \cap C_E B) \cap C_E C \\ &= (A \backslash B) \backslash C. \end{aligned}$$

(2) *On a* $A \cup B \subset A \cup C$ *et* $A \cap B \subset A \cap C$. *Soit* $x \in B$, *montrons que* $x \in C$. *En effet*

$$\begin{aligned} (x \in B) &\Rightarrow (x \in A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow (x \subset A \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in C). \end{aligned}$$

Si $x \in C$, *alors on a fini. Si* $x \in A$, *alors*

$$(x \in A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap C) \Rightarrow (x \in C),$$

donc $x \in C$, *d'où* $B \subset C$.

Solution 10.

(1) *Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *alors* $y_1 = y_1 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_1, y_1)$, *donc* $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*
- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \Leftrightarrow (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1),$$

alors $\mathcal{R}$ *est une relation symétrique.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)] &\Rightarrow [y_1 = y_2 \text{ et } y_2 = y_3] \\ &\Rightarrow [y_1 = y_3] \\ &\Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

On déduit que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *La classe d'équivalence de* $(1, 0)$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((1,0)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \mathcal{R} (1, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

(3) *Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_1, y_1)$, *alors* $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*
- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) &\Leftrightarrow (x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2) \\ &\Leftrightarrow (x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2) \\ &\Leftrightarrow (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation symétrique.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$\begin{aligned} [(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \text{ et } (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)] &\Rightarrow [x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \text{ et } x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2] \\ &\Rightarrow [x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2] \\ &\Leftrightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

On déduit que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence, pour la classe d'équivalence de* $(1, 0)$, *on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((1,0)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \mathcal{R} (1, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 :

(1) *Soit* $\mathcal{R}$ *la relation définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :*

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*/n = km.$$

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = 1n.$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}$ *est une relation réflexive.*

- *Soit* $n, m \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}
[n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}n] &\Leftrightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m) \;\text{ et }\; (\exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 n)] \\
&\Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 k_2 n) \\
&\Rightarrow (\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : k_1 k_2 = 1) \\
&\Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \\
&\Rightarrow n = m,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est une relation anti-Symétrique.*

- *Soit* $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}
[n\mathcal{R}m \text{ et } m\mathcal{R}p] &\Leftrightarrow [(\exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m) \;\text{ et }\; (\exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 p)] \\
&\Rightarrow \left(\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* : n = \underbrace{k_1 k_2}_{k_3} p\right) \\
&\Rightarrow (\exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^* : n = k_3 p) \\
&\Rightarrow n\mathcal{R}p,
\end{aligned}$$

don $\mathcal{R}$ *est une relation transitive.*

Solution de l'exercice 5 :

(1) *Dans* $\mathbb{R}^2$ *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

- *Soit* $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\cos^2(x_1) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_1|.$$

donc $(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$, *ce qui signifie* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) &\Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2| \\
&\Leftrightarrow 1 - \sin^2(x_1) + 1 - \cos^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow \cos^2(x_2) + \sin^2(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_1| \\
&\Rightarrow (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est Symétrique.*

- *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \;\text{ et }\; (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3) &\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|. \\ \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 1 \quad \text{et} \quad |y_2| = |y_3|. \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) \\ + \cos^2(x_2) + \sin^2(x_3) = 2 \\ |y_1| = |y_2| = |y_3| \end{cases} \\
&\Rightarrow \cos^2(x_1) + 1 + \sin^2(x_3) = 2 \text{ et } |y_1| = |y_3| \\
&\Rightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_3) = 1 \text{ et } |y_1| = |y_3| \\
&\Rightarrow (x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_3, y_3)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

(2) *La classe d'équivalence de* $(0, 0)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}((0,0)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\,\mathcal{R}\,(0, 0)\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos^2(x) = 1 \text{ et } y = 0\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = \pi k : k \in \mathbb{Z}) \text{ et } y = 0\right\} \\
&= \left\{(\pi k, 0) : k \in \mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 :

- L'application v est injective, soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$v(n) = v(m) \Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m| \Rightarrow n = m, \text{ car } n, m \in \mathbb{N}.$$

- L'application v n'est pas surjective, car $2 \in \mathbb{N}$ et $v(n) = 2 \Rightarrow n^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
- L'application i est injectiv, soit $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} (i(n) = i(m)) &\Rightarrow (2n^2 - 7 = 2m^2 - 7) \\ &\Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow |n| = |m| \\ &\Rightarrow n = m, \text{ car } n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- L'application i n'est pas surjective, car $9 \in \mathbb{Z}$ et $i(n) = -9 \Leftrightarrow 2n^2 = -2 \Rightarrow n^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, donc i n'est pas surjective.
- L'application k n'est pas injective, comme $k(-1) = k(1) = 9$ et $-1 \neq 1$.
- L'application k n'est pas surjective, car $6 \in \mathbb{N}$ et $k(n) = 6 \Leftrightarrow n^2 = \frac{1}{4}$, n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
- L'application f n'est pas injective, car $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.
- L'application f est surjective. En effet, soit $y \in [0,1]$. On a

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 - y^2},$$

alors

$$y \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{1 - y^2} \leq 1 \\ -1 \leq \sqrt{1 - y^2} \leq 0 \end{cases}$$

donc il existe $x \in [-1, 1]$.

- L'application g est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \Rightarrow \frac{2 - x_1}{x_1 + 3} = \frac{2 - x_2}{x_2 + 3} \\ &\Rightarrow (2 - x_1)(x_2 + 3) = (2 - x_2)(x_1 + 3) \\ &\Rightarrow 6 - 3x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 6 - 3x_2 + 2x_1 - x_1x_2 \\ &\Rightarrow 5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- L'application g n'est pas surjective, car $-1 \in \mathbb{R}$ et $g(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- L'application h est injective. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} h(x_1) &= h(x_2) \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow e^{\ln x_1} = e^{\ln x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- L'application h est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, alors

$$h(x) = y \Rightarrow \ln(x) = y \Rightarrow x = e^y \in \mathbb{R}_+^*.$$

(2) *Calculer* $v \circ k$, $i \circ k$, $k \circ i$.

- *On a* $v \circ k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{v} \mathbb{N}$, *donc*

$$n \to (v \circ k)(n) = v\left(4n^2 + 5\right) = \left(4n^2 + 5\right)^2.$$

- *On a* $i \circ k : \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$, *donc*

$$n \to (i \circ k)(n) = i\left(4n^2 + 5\right) = 2\left(4n^2 + 5\right)^2 - 7.$$

- *On a* $k \circ i : \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{N}$, *donc*

$$n \to (k \circ i)(n) = k\left(2n^2 - 7\right) = 4\left(2n^2 - 7\right)^2 + 5.$$

(3) *Soit* $u :]1, \infty[\to]0, \infty[$ *définie par :* $u(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

- *L'application* u *est injective. Soit* $x_1, x_2 \in]1, \infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} (u(x_1) = u(x_2)) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1}\right) \\ &\Rightarrow (x_1 - 1 = x_2 - 1) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- *L'application* u *est surjective. Soit* $y \in]0, +\infty[$, *alors*

$$u(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = y \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{y} \in]1, +\infty[,$$

car

$$y \in]0, +\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} > 1.$$

donc l'application u *est bijective, avec* $u^{-1} :]0, \infty[\to]1, +\infty[$ *définie par :*

$$u^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Solution de l'exercice 7 :

(1) *L'application f n'est pas injective, car $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$. On a*

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est surjective.

(2) *L'application g est injective. Soit $x_1, x_2 \in [-1,1]$, on a*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow 2x_1\left(1+x_2^2\right) = 2x_2\left(1+x_1^2\right) \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2) - x_1x_2(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2 \text{ ou } x_1x_2 = 1), \end{aligned}$$

si $x_1x_2 = 1$ et $x_1, x_2 \in [-1,1]$, on a

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

ce qui entraîne que $x_1 = x_2 = 1$ ou $x_1 = x_2 = -1$, c'est-à-dire que $x_1 = x_2$, ainsi

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'application g est surjective. Soit $y \in [-1,0[\cup]0,1]$, alors

$$\begin{aligned} (f(x) = y) &\Leftrightarrow \left(y\left(1+x^2\right) = 2x\right) \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Si $y \in [-1,1]$, alors $1 - y^2 \geq 0$, comme $\Delta = 4 - 4y^2 = 4\left(1-y^2\right) \geq 0$, alors l'equation $yx^2 - 2x + y = 0$ admet deux solutions

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad \text{avec } y \neq 0.$$

La seule solution acceptée $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$, car, si $y = \frac{1}{2}$, alors $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} = 2+\sqrt{3} \notin [-1,1]$.
Si $y = 0$, alors $x = 0$. Donc g est une bijection.

Solution de l'exercice 8 :

(1) *La fonction f est injective. Soit $x_1, x_2 \in]0,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} [f(x_1) = f(x_2)] &\Rightarrow \left(\sqrt{x_1}+1\right)^2 - 1 = \left(\sqrt{x_2}+1\right)^2 - 1 \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{x_1}+1\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}+1\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1}+1 = \sqrt{x_2}+1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

La fonction f est surjective. Soit $y \in [0,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned} [y = f(x)] &\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x}+1\right)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2 = y+1. \end{aligned}$$

Comme $y \in [0,+\infty[$, alors l'équation $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = y+1 > 1$ admet des solution

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x}+1\right)^2 = y+1 &\Leftrightarrow \left|\sqrt{x}+1\right| = \sqrt{y+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \sqrt{y+1}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x}+1 > 0$, donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{y+1}-1\right)^2 \geq 0,$$

alors

$$x = \left(\sqrt{y+1}-1\right)^2 \in [0,\infty[.$$

(2) *La fonction réciproque $f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[$ est donnée par :*

$$f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 = x + 2 - 2\sqrt{1+x}, \quad \forall x \in [0,\infty[.$$