

Exercice 01: (6pts)

On considère $f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2+x}{3-x}$

1. Calculons $f^{-1}(\{-1\})$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid f(x) \in \{-1\} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid f(x) = -1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid \frac{2+x}{3-x} = -1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid 2+x = -3+x \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid 2 = -3 \right\} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset \quad (01)$$

2. * Injectivité

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$: $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{2+x_1}{3-x_1} = \frac{2+x_2}{3-x_2}$$

$$\Leftrightarrow (2+x_1)(3-x_2) = (2+x_2)(3-x_1)$$

$$\Leftrightarrow -2x_2 + 6 - x_1x_2 + 3x_1 = -2x_1 + 6 + 3x_2 - x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (01)$$

d'où f est injective.

* Surjectivité : f n'est pas surjective car $y = -1$ n'a pas d'antécédant (01)

* Bijectivité : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. (0,5)

3. Si $f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow I$ on ($I \subset \mathbb{R}$)

$I = \mathbb{R} - \{4\}$ (d'après question 2) d'où (01)

$$f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2+x}{3-x}$$

$$\Leftrightarrow y(3-x) = 2+x$$

$$\Leftrightarrow 3y - xy = 2+x$$

$$\Leftrightarrow -xy - x = 2 - 3y$$

$$\Leftrightarrow x(y+1) = 3y-2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y-2}{y+1} \quad (01)$$

donc

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y+1} \quad (0,5)$$

exercice 02: (4,5)

$$1. \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x)^2 \quad (01)$$

$$2A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - 1/2}{x} \quad (0,5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - 2 - x}{2x^2} = \frac{0}{0} \text{ FID} \quad (0,5)$$

En utilisant DL₂(0) (0,5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2) - 2 - x}{2x^2} \quad (0,5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x - 1/4x^2 - 2 - x}{2x^2} = -\frac{1}{8} = f'(0). \quad (0,5)$$

d'où f est dérivable en 0.

$$B) f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2} & (01) \quad x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ -1/8 & x = 0 \end{cases} \quad (0,5)$$

exercice 03: (09,5 pts)

Soit la fonction $f(x) = \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$,

1. Domaine de définition:

$$\operatorname{sh}(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R}^* \text{. } (01)$$

2. La dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) (1 + \operatorname{ch}(x))}{(\operatorname{sh}(x))^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{sh}(x))^2 - \operatorname{ch}(x) - (\operatorname{ch}(x))^2}{(\operatorname{sh}(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 - \operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2} \text{. } (02)$$

le signe de la dérivée dépend du signe de $(-1 - \operatorname{ch}(x))$,
 $\forall x \in D_f, \operatorname{ch}(x) > 0$. d'où $f'(x) < 0$ donc f est
décroissante sur D_f . (0,5)

- Les limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 + e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right) = -1 \text{ car } \begin{cases} e^{2x} \rightarrow 0 \\ e^x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (01) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right) = \frac{2}{0^-} = -\infty \text{. } (01)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right) = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{. } (01)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{2}{e^x} + 1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \right) = 1 \text{ car}$$

$$\begin{cases} e^x \rightarrow +\infty \\ \frac{2}{e^x} \rightarrow 0 \\ e^{-2x} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

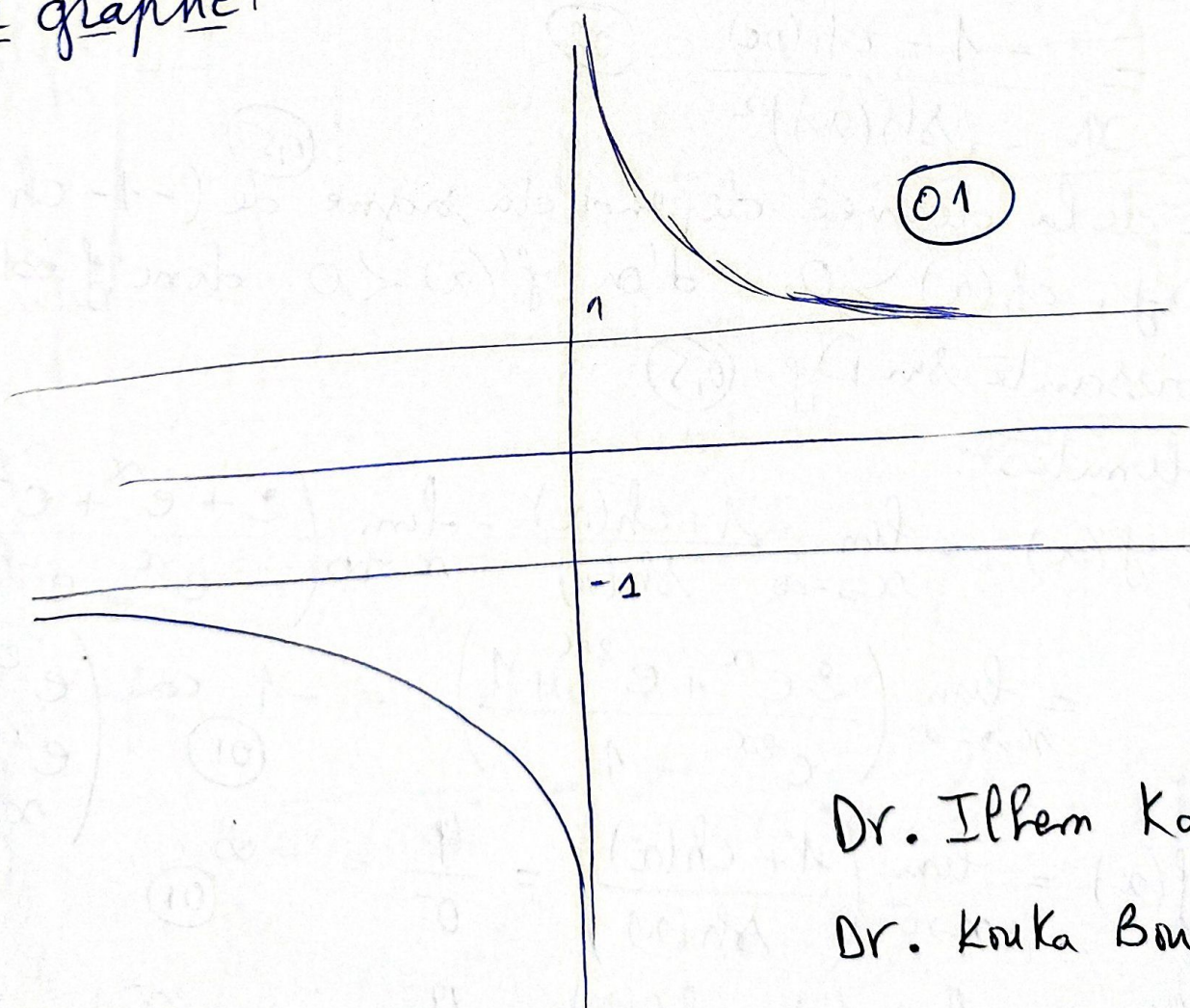
(01)

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	-1	$+\infty$	1

(015)

3. Le graphe :



Dr. Ilhem Kadri.

Dr. Kouka Boutra.