Chapitre 3 : Les fonctions réelles à une variable réelle

Les objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Connaître et interpréter :
  - La notion de limite.
  - La notion de continuité.
  - La notion de dérivée.
- Approfondir les notions de fonctions continues et dérivables :
  - Théorème des Valeurs Intermédiaires (T.V.I).
  - Théorème de Rolle.
  - Théorème des Accroissement Finis (T.A.F).
- Connaître et utiliser les corollaires du théorème des Accroissement finis.
- Connaître et utiliser la règle de l'Hôpital pour le calcul de limites.

1. Notions de fonctions

1.1. Définitions

Définition

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$.

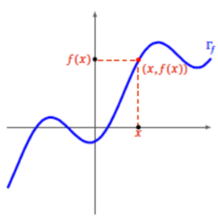
En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

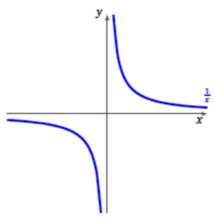
Exemple

La fonction définie par

$$\begin{array}{llll} f : &]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in U\}$.





1.2. Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes

- la **somme** de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$.
- le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$.
- la **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définie sur U. Alors

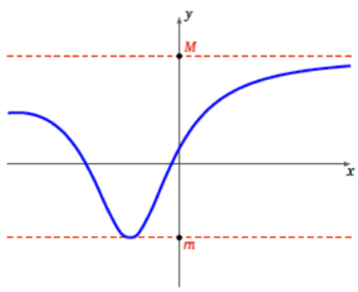
- $f \geq g$ si pour tout $x \in U$: $f(x) \geq g(x)$.
- $f \geq 0$ si pour tout $x \in U$: $f(x) \geq 0$.
- $f > 0$ si pour tout $x \in U$: $f(x) > 0$.
- f est dite **constante** sur U si : il existe $(a \in \mathbb{R}, \forall x \in U : f(x) = a)$ ou $(f(x) = f(y),\ \forall x,\ y \in \mathbb{U})$.
- f est dite **nulle** sur U si : pour tout $x \in U, f(x) = 0$.

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application définie sur U. On dit que

- f est **majorée** sur U si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in U : f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur U si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in U : f(x) \geq m$.
- f est **bornée** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in U : |f(x)| \leq M$.

Exemple



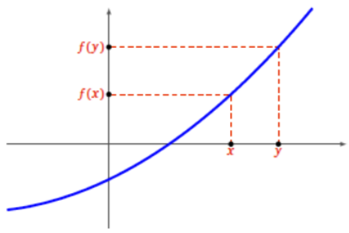
Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

1.4. Fonction croissantes, décroissantes

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U. On dit que

- f est **croissante** sur U si : pour tous $a, b \in U,\ a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- f est **strictement croissante** sur U si : pour tous $a, b \in U,\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante** sur U si : pour tous $a, b \in U,\ a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- f est **strictement décroissante** sur U si : pour tous $a, b \in U,\ a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.



Voici le graphe d'une fonction strictement croissante.

Exemple

- La fonction racine carrée :
$$f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$ est strictement croissante.
- La fonction exponentielle :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = e^x \end{array}$$ est strictement croissante.
- La fonction logarithme :
$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = ln(x) \end{array}$$ est strictement croissante.
- La fonction valeur absolue :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = |x| \end{array}$$ n'est ni croissante, ni décroissante.

  Par contre, la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x \end{array}$$ est strictement croissante.

1.5. Parité et périodicité

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On dit que

- f est **paire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si : $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique — *Remarque*

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple

- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire.
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$.

La fonction f est dite **périodique** de période T si : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

Exemple

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont 2π-périodiques.
- La fonction **tangente** est π-périodique.

2. Limite d'une fonction

2.1. Limites en un point

Voisinage — *Définition*

Une partie $U \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert contenant x_0.

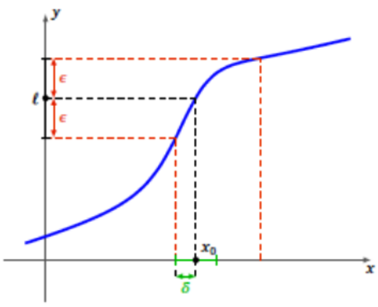
Limite en un point — *Définition*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I (ou un point adhérent à I).

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, a une limite l au point x_0, si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note, alors : $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \to_{x\to x_0} l$.



Remarque

- L'inégalité $0 < |x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ x \neq x_0$.
- L'inégalité $|f(x) - l| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Exemple

La fonction $x \mapsto 3x - 2$ a pour limite 1 quand x tend vers 1. En effet,

$$|f(x) - 1| = |3x - 3| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta = \frac{\varepsilon}{3}$ tel que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.

2.2. Limites en l'infini

Limite en l'infini — **Définition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in I, \ x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On note, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

On dit que f a pour limite l en $-\infty$ si

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in I, \ x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On note, alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Exemple

On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$,

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si \quad n \ est \ pair \\ -\infty & si \quad n \ est \ impair \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

2.3. Unicité de la limite

Limite à gauche et à droite — **Définition**

Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I.

- On appelle **limite à droite** en x_0 de f la limite notée par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l_d$ si
- $\forall \varepsilon > 0, \ \delta > 0, \ \forall x \in I \ : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l_d| < \epsilon$

- On appelle **limite à gauche** en x_0 de f la limite notée par : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l_g$ si

  $\forall \varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ \forall x \in I\ : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l_g| < \varepsilon$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x + 3 \ si \ \ x \geq 0 \\ 2x + 5 \ si \ \ x < 0 \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 5$.

Dans ce cas, on dit que f n'admet pas de limite en 0.

Remarque

On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$$

Unicité de la limite — **Complément**

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

2.4. Propriétés sur les limites

Proposition : "Propriétés sur les limites"

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors

- $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot l$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + l'$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = l \times l'$.
- Si $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

  De plus, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f} = 0$.
- si h est une fonction bornée au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \cdot f(x) = 0$.

Proposition : "Composition de limites"

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{y \to l} g(y) = g(l)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$.

Exemple

On a

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{y\to 0} \sin(y) = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \sin(\dfrac{1}{x}) = 0$

Proposition :

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors $l \leq l'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Théorème de gendarmes :

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$, alors

g a une limite l en x_0 i.e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Exemple

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

$\dfrac{-1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. (Car $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$)

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = 0$

3. Continuité d'une fonction

3.1. Continuité en un point

Continuité en un point ***Définition***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

- On dit que f est **continue en un point** $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I\ :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.

Remarque

On note $C(I;\mathbb{R})$ ou $C^0(I;\mathbb{R})$ **l'ensemble des fonctions continues** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Continuité à droite et à gauche — *Définition*

- On dit que f est **continue à droite** en point $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est **continue à gauche** en point $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0.

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues sur I :

- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $I = [0, +\infty[$.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ avec $I = \mathbb{R}$.
- La fonction $\exp$ avec $I = \mathbb{R}$.
- La fonction $\ln$ avec $I =]0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x > 1 \\ 3 & si \quad x = 1. \\ 4x+5 & si \quad x < 1 \end{cases}$

  On a

  $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 3 = f(1)$, mais $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 9 \neq f(1)$.

  Dans ce cas, on dit que f n'admet pas une limite en 1. Ici f est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1, donc f n'est pas continue en 1.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$

  Alors, f n'est pas continue à gauche en 0. Car

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-x}{x} = -1 \neq f(0) = 1.$$

Par contre, f est continue à droite en 0. Car

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = 1 = f(0).$$

On conclut donc que, f n'est pas continue en 0.

Proposition :

Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
- $f + g$ est continue en x_0.
- $f \times g$ est continue en x_0.
- si $f(x_0) \neq 0$, alors : $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

Proposition :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3.2. Prolongement par continuité

Prolongement par continuité ***Définition***

Soient I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus x_0 \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0.

  Notons alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
- On définit alors la fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$:

  $$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ l & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

  Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Alors,

f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement $\widetilde{f}$ est défini par

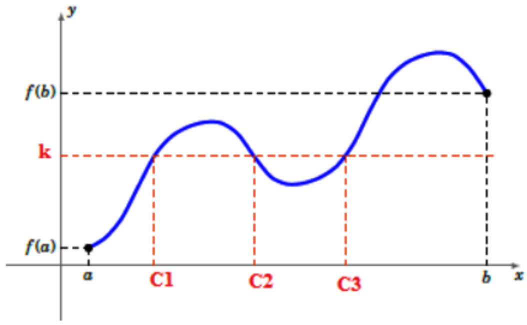
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

3.3. Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ou $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que : $f(c) = 0$.

4. Dérivée et différentiabilité d'une fonction

4.1. Dérivée en un point

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.

En physique, lorsqu'une grandeur est en fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur, et la dérivée seconde donne l'accélération.

Fonction dérivable — *Définition*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Soit $x_0 \in I$.

f est **dérivable** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.

La limite s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Ainsi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition : "Autre écriture de la dérivée"

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Preuve :

On a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

On pose : $h = x - x_0$, alors $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$.

Donc, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Rappel

Rappelons l'interprétation géométrique de la dérivée : si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de la fonction f admet une **tangente** au point $(x_0, f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Définition

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f, elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

Exemple

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2$. Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

On a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Donc, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

Dérivabilité à droite et à gauche ***Définition***

- f est **dérivable à droite** en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$.
- f est **dérivable à gauche** en x_0, si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.
- f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Proposition :

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Puisque, $f'_d(0) = 1 \neq f'_g(0) = -1$.

Proposition : "Opérations sur les dérivées"

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x_0 \in I$:

- $f + g$ est dérivable en x_0, et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $f \cdot g$ est dérivable en x_0, et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
- Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0, et on a $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Proposition : "Dérivation des fonctions composées"

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$, et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$.

Nous avons $g(x) = ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Alors, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1 + x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}$.

4.2. Dérivée des fonctions usuelles

Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

4.3. Dérivées successives

Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et soit f' sa dérivée.

Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable sur I on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f.

Plus généralement on note :

$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$, et $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

- Si **la dérivée n-ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.
- Si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dit que f est de classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

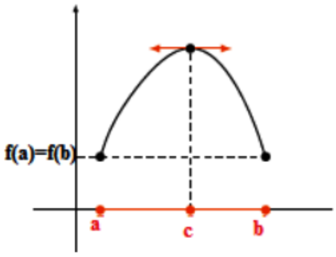
4.4. Théorème de Rolle

Théorème : "Théorème de Rolle"

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

- f est continue sur $[a,b]$.
- f est dérivable sur $]a,b[$.
- $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe au moins $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

4.5. Théorème des accroissements finis

Théorème : "Théorème des accroissements finis"

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$.

Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Preuve :

Posons $l = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - l\,(x-a)$.

Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(a)$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(x) = f'(x) - l$. Ce qui donne : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.6. Fonction croissante et dérivée

Corollaire :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[\,,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est **croissante** sur [a, b] .
2. $\forall x \in]a,b[\,,\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est **décroissante** sur [a, b].
3. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est **constante** sur [a, b].
4. $\forall x \in]a,b[\,,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est **strictement croissante** sur [a, b].
5. $\forall x \in]a,b[\,,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est **strictement décroissante** sur [a, b] .

Remarque

La réciproque du point (4) (et aussi du (5)) est fausse.

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire : "Règle de l'Hopital"

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\ (ou \ \ \infty)$. Alors,

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemple

1. Calculer la limite en 1 de $\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$.

   On vérifie que :

   - $f(x) = ln(x^2+x-1)$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, f dérivable et $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$.
   - $g(x) = \ln(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, g dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   - $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2x^2+x}{x^2+x-1} \to_{x\to 1} 3$. Donc, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to 1} 3$.

2. Calculer la limite en 0 de $\dfrac{e^{\cos(x)}-e}{\cos(x)-1}$.

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos(x)}-e}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} e^{\cos(x)} = e$.

5. Exercices

Exercice 1 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-10}}{x-7}$.
2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3x}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+4}}$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2-11x+18}$.
5. $f(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt{4x-1}}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.
8. $f(x) = \dfrac{3x-5}{\sqrt{2x+6}}$.

Exercice 2 :

En utilisant la définition de la limite, montrer que

- $\lim_{x\to 2}(4x-3)=5$.
- $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$.
2. $\lim_{x\to-\infty} 2x^3-5x^2+x+1$.
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x^2+x}$.
4. $\lim_{x\to-\infty} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$.
5. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-4x}{x-3}$.
6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$.
7. $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-1}}$.
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

Exercice 4 :

1. Soit $f(x)=-x^2+6x-8$. Montrer que f est majorée par 1 sur D_f.
2. Soit $g(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$. Montrer que g est minorée par 1 sur $[-1,0]$.
3. Soit $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}; |h(x)|\leq 1$.

Exercice 5 :

Soit $f(x)=\dfrac{x-2\sin x}{|x|+3}$ avec $D_f=\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-2\sin x|\leq |x|+2$.
2. Déduire que f est bornée.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que f est continue sur $]-\infty,-1[$.
3. Déterminer $f'(x)$.

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$.

Étudier la dérivabilité et la continuité de f sur D_f.

Exercice 8 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(e^x)$.
2. $g(x) = \sqrt{x^2 + e^{-3x}}$.
3. $h(x) = \ln(x^3 + \sqrt{x})$.