Chapitre 4 : Application aux fonctions élémentaires

Dans ce chapitre il s'agit d'ajouter à notre catalogue de nouvelles fonctions $cosh,\ sinh,\ tanh,\ arccos,\ arcsin,\ arctan,\ Argch,\ Argsh,\ Argth.$

Les objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Rappeler les fonctions logarithmiques et exponentielles vues en terminale.
- Définir et étudier les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques.
- Définir et étudier les fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

1. Fonction puissance, fonction logarithmique et fonction exponentielle

1.1. Fonction puissance

Définition

On appelle fonction puissance d'un réel a positif, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$.

Exemple

- $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 3}$.
- $5^{-2} = e^{-2\ln 5}$.

Remarque

La fonction puissance est strictement positive du fait de sa notation exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)} > 0$.

Propriétés :

Pour tous $a, b > 0$, on a les égalités suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(a^x) = x\ln(a)$.
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : a^{x+y} = a^x \times a^y$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)^y = a^{xy}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : (ab)^x = a^x \times b^y$.

Étude de la fonction puissance :

Soit la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a^x$.

Comme $x \mapsto a^x = e^{x \ln (a)}$, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car composition de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

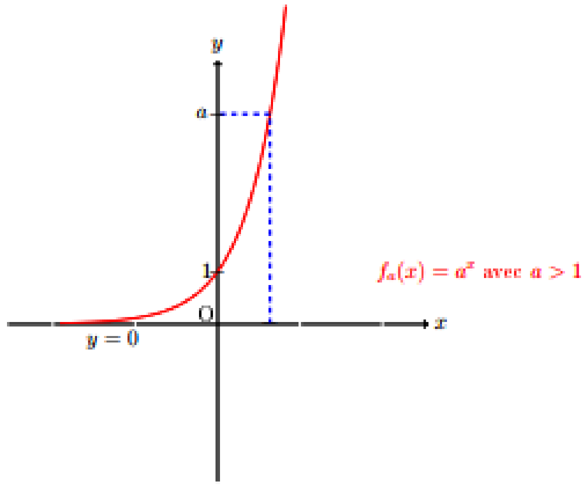
On a alors : $\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) = (e^{x \ln (a)})' = \ln (a) e^{x \ln (a)} = \ln (a)\ a^x$.

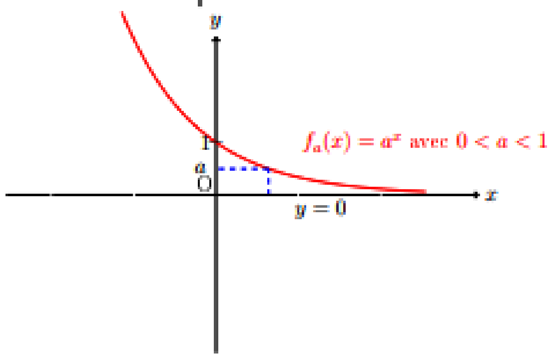
Le signe de la dérivée dépend donc du signe de $\ln (a)$.

- Si $a > 1$, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) > 0$, **la fonction puissance est croissante**.
- Si $0 < a < 1$, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R} : f_a'(x) < 0$, **la fonction puissance est décroissante**.

Limite à l'infini :

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$





1.2. Fonction logarithmique

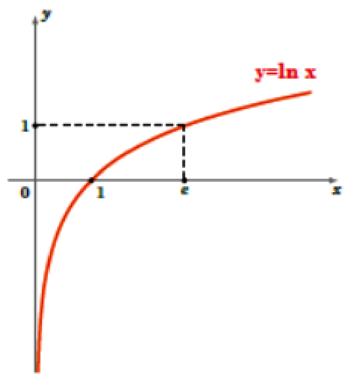
Proposition :

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, et on a $\ln (1) = 0$.

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

1. $\ln (a \times b) = \ln (a) + \ln (b)$.
2. $\ln (\dfrac{1}{a}) = -\ln (a)$.
3. $\ln (a^n) = n \ln (a)$, pour tous $n \in \mathbb{N}$.

4. $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante donc, elle définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.



Remarque

$\ln(\cdot)$ s'appelle le **logarithme naturel** ou aussi **logarithme népérien**.

Limites particulières :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

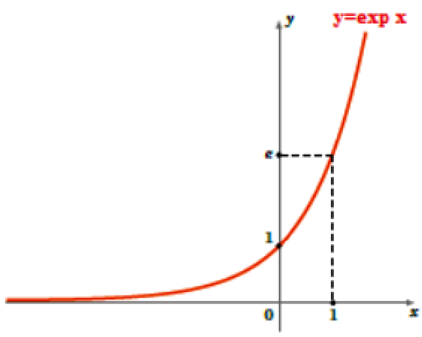
1.3. Fonction exponentielle

Définition

La fonction réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction **exponentielle**, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$.

Remarque

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, où $(\exp(x))' = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.



Propriétés des exponentielles :

Soient a, b et α des réels :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$.
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^\alpha = e^{\alpha a}$.

Limites particulières :

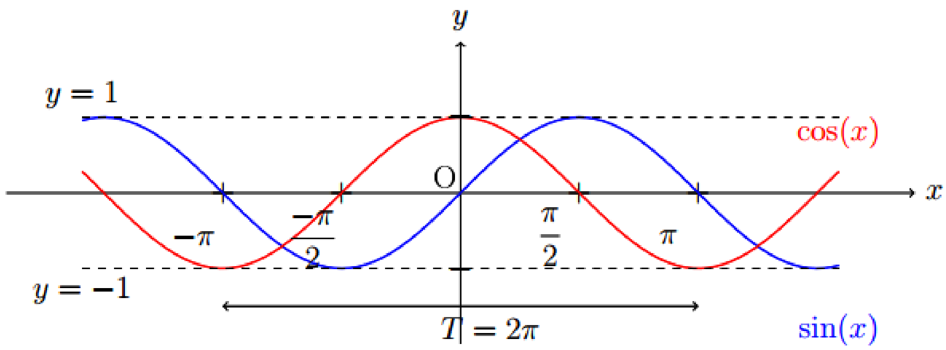
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2. Fonctions trigonométriques et leurs inverses

2.1. Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus :

Fonction	$\sin x$	$\cos x$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	impaire	paire
Période	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$



Propriétés :

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$

"Les fonctions tangente et cotangente" ***Définition***

- On appelle **tangente** la fonction **tan** (ou **tg**) définie par

  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A$

  où $A = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$
- On appelle **cotangente** la fonction **cot** définie par

  $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus B$

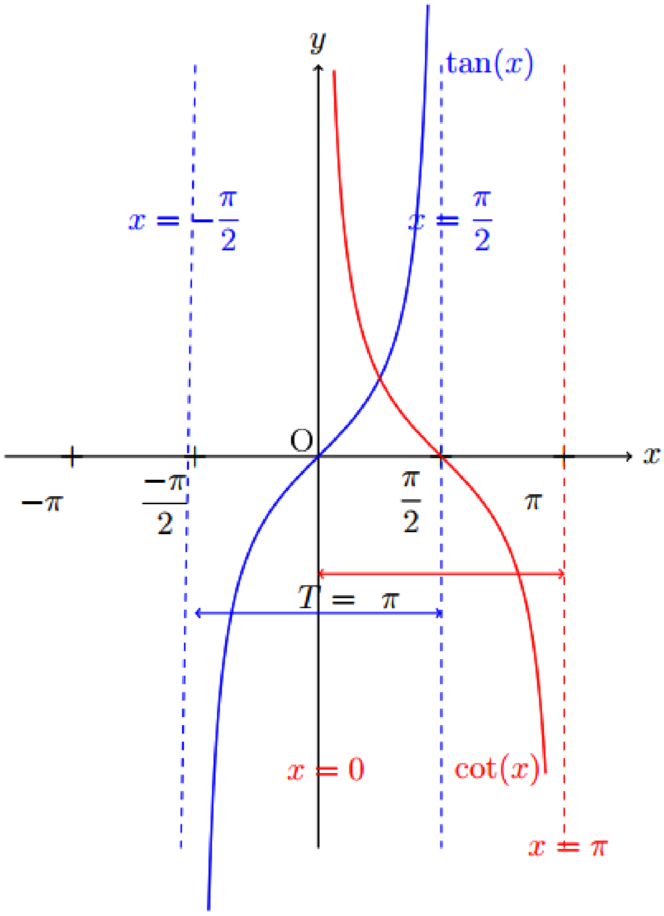
  où $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

Remarque

Les fonctions tangente et cotangente sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition et l'on a

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus A.$

$(\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus B.$



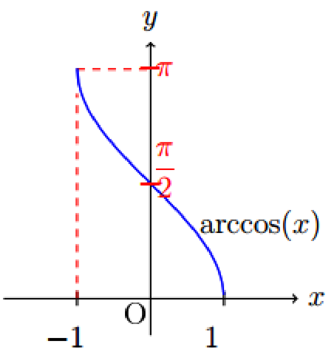
2.2. Fonctions circulaire réciproques

Fonction x → arccos x

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \cos\ x.$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction $\cos :\ [0,\pi] \to [-1,1]$, est une bijection.

Sa fonction (bijection) réciproque est la fonction **arccosinus**, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.



Propriétés :

- $\forall x \in [-1,1]$, on a : $\cos\ (\arccos\ (x)) = x.$
- $\forall x \in [0,\pi]$, on a : $\arccos\ (\cos\ (x)) = x.$
- Si $x \in [0,\pi]:\ \cos\ (x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y).$

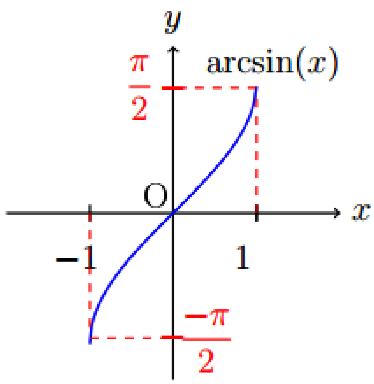
- $(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1, 1[$.

Fonction x → arcsin x

La restriction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est une bijection, car sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement croissante. Alors,

Sa fonction réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée : $\arcsin$, La restriction

$$\begin{array}{llll} \arcsin : & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array}.$$



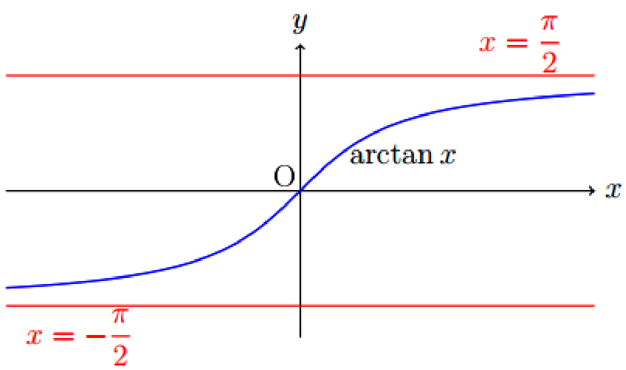
Propriétés :

- $\forall x \in [-1, 1]$, on a : $\sin(\arcsin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\arcsin(\sin(x)) = x$.
- Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1, 1[$.

Fonction x → arctan x

La restriction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une bijection, car sur cet intervalle la fonction tan est continue et strictement croissante.

Sa fonction réciproque est la fonction **arctangente**, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\tan(\arctan(x)) = x$.
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\arctan(\tan(x)) = x$.
- Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$.
- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Fonctions hyperboliques et leurs inverses

3.1. Fonctions hyperboliques

Définition

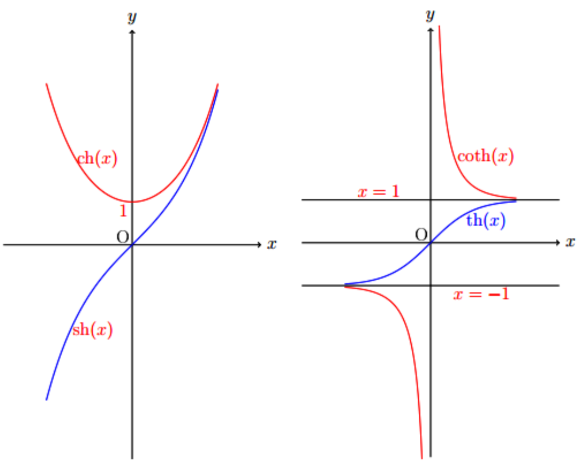
Les fonctions de la variable réelle x

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \coth(x) = \frac{1}{tanh(x)},$$
$(x \neq 0)$,

s'appellent respectivement **cosinus hyperbolique**, **sinus hyperbolique**, **tangente hyperbolique** et **cotangente hyperbolique**.

Propriétés :

1. La fonction $\cosh$ est paire et les fonction $\sinh, \tanh, \coth$ sont impaires.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les relations :
$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x, \qquad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x},$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \qquad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\coth(x)}.$$
3. Les fonction $\cosh, \sinh, \tanh$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, et l'on a
   - $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.
   - $(\sinh(x))' = \cosh(x)$.
   - $(\tanh(x))' = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$.
4. La fonction $\coth$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et l'on a $(\coth(x))' = \dfrac{-1}{\sinh^2(x)}$.

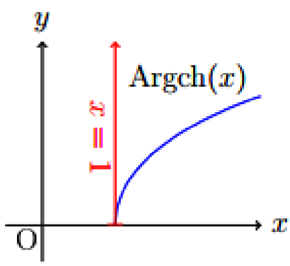


3.2. Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction x → Argch

La fonction $\cosh$ est continue, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On ne peut donc définir l'application réciproque comme fonction continue strictement monotone qu'en considérant la restriction $\cosh : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est une bijection.

Sa fonction réciproque est $Argch : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, (Argument cosinus hyperbolique)



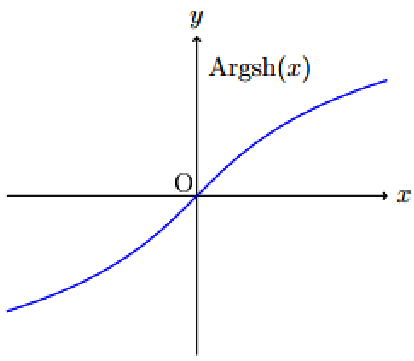
Propriétés :

- $\forall x \in [1, +\infty[, \ \cosh (argch\,(x)) = x.$
- $\forall x \in [0, +\infty[, \ argch\,(cosh\,(x)) = x.$
- $\forall x \in [1, +\infty[, \ argch\,(x) = \ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1}).$
- La fonction argch est continue sur $[1; +\infty[$, dérivable sur $]1; +\infty[$, et l'on a : $(argch\,(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

Fonction x → Argsh

$sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement croissante (vérifiant $\lim_{x \to -\infty} \sinh\,(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sinh\,(x) = +\infty$), c'est donc une bijection.

La fonction réciproque est $argsh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (Argument sinus hyperbolique).

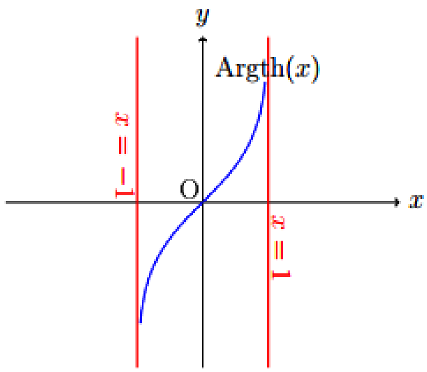


Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sinh\,(argsh\,(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ argsh\,(sinh\,(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ argsh\,(x) = \ln\,(x + \sqrt{x^2 + 1}).$
- La fonction argsh est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a : $(argsh\,(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

Fonction x → Argth

L fonction $tanh$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,+1[$. Elle admet donc une fonction réciproque. Alors, la fonction $tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[$ est une bijection, on note $Argth :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.



Propriétés :

- $\forall x \in]-1,1[,\ \tanh(argth(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ argth(tanh(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+},\ argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$
- La fonction argth est continue et dérivable sur $]-1;1[$, et l'on a : $(argth(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$

4. Exercices

Exercice 1 :

Calculer les quantités suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right).$
2. $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right).$
3. $\arctan(\sqrt{3}).$
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$
5. $\arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}.$
2. $g(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$
3. $h(x) = \arccos(1-2x^2).$
4. $k(x) = \arctan\left(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\right).$

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin\,(\dfrac{x}{x+2})$.
2. $g(x) = argsh\,(x^2 + 1)$.
3. $h(x) = \arctan\,(\dfrac{1}{x})\; e^{-x^2+x+2}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que : $0 < \arccos(\dfrac{3}{4}) < \dfrac{\pi}{4}$.
2. Résoudre : $\arccos\,(x) = 2\arccos\,(\dfrac{3}{4})$.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\,(x) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Déterminer le domaine ou f elle est définie et continue.
- Sur quel ensemble f est-elle dérivable? puis, calculer sa dérivée.