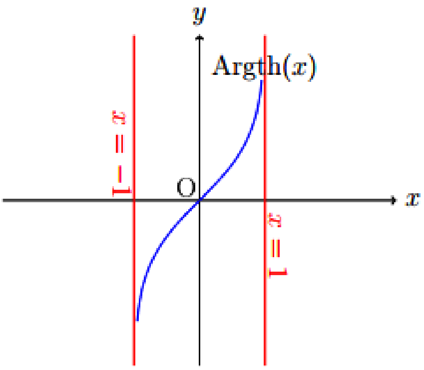
Fonction x → Argth

La fonction $tanh : \mathbb{R} \rightarrow]-1,1[$ est une bijection, on note $Argth :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque.



Propriétés :

- $\forall x \in]-1,1[,\ \tanh(argth(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ argth(tanh(x)) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+},\ argth(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$
- La fonction argth est continue et dérivable sur $]-1;1[$, et l'on a : $(argth(x))' = \dfrac{1}{1-x^2}.$

4. Exercices

Exercice 1 :

Calculer les quantités suivantes :

$\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right),\ \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right),\ \arctan(\sqrt{3}),\ \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ \arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right).$

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3+\sin(x)}.$
2. $g(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right).$
3. $h(x) = \arccos(1-2x^2).$
4. $k(x) = \arctan\left(\dfrac{2(1-x)}{2x-x^2}\right).$

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+2}\right).$
2. $g(x) = argsh(x^2+1).$
3. $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-x^2+x+2}.$

Exercice 4 :

1. Montrer que : $0 < \arccos(\frac{3}{4}) < \frac{\pi}{4}$.
2. Résoudre : $\arccos(x) = 2\arccos(\frac{3}{4})$.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Déterminer le domaine ou f elle est définie et continue.
- Calculer la dérivée de f, sur quel ensemble est-elle dérivable?