

# Chapitre 5 : Développement limité



Les développements limités sont l'outil principal d'approximation locale des fonctions. Chercher un développement limité d'une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $a$ , c'est chercher un polynôme qui, au voisinage de  $a$ , se comporte comme  $f$ .

## Les objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- Connaître les différentes formules de Taylor.
- Connaître les développements limités usuelles.
- Mener des opérations sur les DL.

## 1. Formule de Taylor

### 1.1. Formule de Taylor-Young

#### Théorème :

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ . Supposons que  $f$  est de classe  $n - 1$  sur  $]a, b[$  et  $f^{(n)}(x_0)$  existe (finie). Alors  $\forall x \in ]a, b[$ , on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où  $\varepsilon$  est une fonction définie sur  $]a, b[$  telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ .

#### Remarque :

Le terme  $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ , sera noté par  $o(x - x_0)^n$ .

### 1.2. Formule de Maclaurin Young

Lorsque  $x_0 = 0 \in ]a, b[$  dans la formule précédente, on obtient la formule de Maclaurin à l'ordre  $n$  avec reste de Young :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

## 2. Développement limité

### 2.1. Développement limité au voisinage de 0



Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de 0, sauf peut-être en 0. On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0, s'il existe un intervalle ouvert  $J$  de centre 0 et des constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in J \setminus \{0\}$ , on a

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n),$$

ou  $o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

Le polynôme  $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  est dit partie régulière du développement limité et  $x^n \varepsilon(x)$  le reste ou terme complémentaire.

### ?

**Exemple**

Pour  $x \neq 1$ , on obtient par division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $n$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1-x},$$

or,  $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ , d'où le développement limité de  $\frac{1}{1-x}$ .

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

**Théorème :**

Si  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  au voisinage de 0, alors ce DL est unique.

**Conséquence :**

Si  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  au  $v(0)$  et  $f$  de classe  $C^n$ , alors

$$a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Théorème :**

Une fonction de classe  $C^n$  sur un intervalle  $I$  ( $0 \in I$ ) et que  $f^{(n)}(0)$  existe. Alors  $f$  admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre  $n$  suivant

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

### ?

**Exemple**

Le développement limité d'ordre 4 de quelques fonctions usuelles au voisinage de 0 :

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

$$2. \sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

$$3. \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - o(x^4).$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

$$5. ch(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

$$6. sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

## 2.2. Développement limité au voisinage d'un point

Pour déterminer le (DL) au voisinage de  $a$ , on pose  $h = x - a$  :  $(x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0)$ . Puis, on écrit le (DL) au voisinage de  $h = 0$  et on remplace par  $h = x - a$ .

? **Exemple**

DL de la fonction  $e^x$  au voisinage de 1 d'ordre  $n$ .

On pose :

$$\begin{cases} h = x - 1 \Leftrightarrow x = h + 1 \\ x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$$

On a DL de la fonction  $e^h$  au voisinage de 0 :

$$e^h = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Alors,

$$e^x = e^{1+h} = e \cdot e^h = e \left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n)\right).$$

Ainsi,

$$e^x = e \left(1 + x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n)\right).$$

D'où,

$$e^x = e \left(x + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n)\right).$$

? **Exemple**

DL de la fonction  $\ln(1+3x)$  au voisinage de 1 d'ordre 3.

On pose :

$$\begin{cases} h = x - 1 \Leftrightarrow x = h + 1 \\ x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$$

On a :

$$\ln(1+3x) = \ln(1+3h+3) = \ln(4+3h) = \ln\left(4\left(1+\frac{3h}{4}\right)\right) = \ln(4) + \ln\left(1+\frac{3h}{4}\right).$$

Donc,

$$h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{3h}{4} \rightarrow 0, \text{ Alors}$$

$$\ln\left(1+\frac{3h}{4}\right) = \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + O(h^3) = \frac{3h}{4} - \frac{9h^2}{32} + \frac{9h^3}{64} + o(h^3).$$

Ainsi,

$$\ln(1+3x) = \ln(4) + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9(x-1)^2}{32} + \frac{9(x-1)^3}{64} + o((x-1)^3).$$

## 2.3. Développement limité au voisinage de l'infini



Définition

Le développement limité de  $f$  au voisinage de l'infini, se ramène à un développement limité au voisinage de 0, en posant :

$$\begin{cases} h = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow \infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$$



Exemple

Développer à l'ordre 3, la fonction  $f : x \rightarrow \frac{1-3x}{1+x}$  au voisinage de  $+\infty$ .

On pose :  $x = \frac{1}{h}$ , alors  $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ .

$$f(h) = \frac{1 - \frac{3}{h}}{1 + \frac{1}{h}} = \frac{h - 3}{h + 1} = (h - 3) \frac{1}{1 + h} = (h - 3)(1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)).$$

Alors,

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = -3 + 4h - 4h^2 + 4h^3 + o(h^3).$$

Donc,

$$f(x) = -3 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$



Exemple

Développer à l'ordre 2, la fonction  $f : x \rightarrow \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

On pose :  $x = \frac{1}{h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{x}$ , donc si  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow h \rightarrow 0$ .

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \exp\left(\frac{h}{1-h}\right) = \exp(h + h^2 + o(h^2)) = 1 + h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2).$$

Ainsi,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

## 2.4. Opérations sur les développements limités

Soient  $f, g$  deux fonctions dont les développements limités au  $\nu(0)$  sont

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + o(x^n).$$

Où  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .

**Somme et produit :**

Le développement de la somme  $f + g$  est

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

Le produit admet le développement suivant :

$$f(x) \cdot g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + b_0a_1)x + \dots + (a_0b_n + a_nb_0)x^n + o(x^n).$$



DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto e^x + \cos(x)$  est

$$e^x + \cos(x) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + (1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)).$$

Ainsi,

$$e^x + \cos(x) = 2 + x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$



DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto \sin(x) \ln(1+x)$  est

$$\sin(x) \ln(1+x) = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)).$$

Ainsi,

$$\sin(x) \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

**Quotient :**

On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Si  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + o(x^n)$  et  $b_0 \neq 0$ . Alors,

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + o(x^{n+1})}.$$

Donc,

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0[1 + \frac{b_1}{b_0}x + \frac{b_2}{b_0}x^2 + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^{n+1})]}.$$

D'où,

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \frac{b_2}{b_0}x^2 + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^{n+1})}.$$

On pose

$X = 1 + \frac{b_1}{b_0}x + \frac{b_2}{b_0}x^2 + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)$ , et en utilisant le DL de  $\frac{1}{1+x}$ , on obtient le DL de  $\frac{1}{g(x)}$ .

Puis on multiplie par le DL de  $f(x)$  à l'ordre  $n$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$  admet un DL au voisinage de 0.



Calculons le DL de la fonction  $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  à l'ordre 3 au point 0.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \neq 0$ , alors on a

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ et } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} - o(x^3).$$

Appliquons la division selon les puissances croissantes, on obtient

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

### Parité du DL en 0



- Si  $f$  est une fonction paire qui admet un DL en 0, alors son DL ne contient que des puissances paire de  $x$ .
- Si  $f$  est une fonction impaire qui admet un DL en 0, alors son DL ne contient que des puissances impaire de  $x$ .

Par exemple,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$ .

### Propriétés :

- Si  $f$  admet un DL en  $x_0 \neq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe.
- Si  $f$  admet un DL au voisinage de  $x_0$  et  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

### Conséquences :

1. Si  $f$  n'admet pas de limite en  $x_0$ , alors  $f$  n'admet pas de DL en  $x_0$ . par exemple,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0.$$

2. Si  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$  et  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  n'admet pas DL au voisinage de  $x_0$ . Par exemple,

$f(x) = |x|$  en  $x_0 = 0$ . Comme  $f$  est continue en 0 et elle n'est pas dérivable en 0 donc elle n'admet pas DL au voisinage de 0.

### Composition des DL :

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n),$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + o(x^n),$$

avec  $P_n$  (resp.  $Q_n$ ) est la partie régulière ( ou principale) du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  (resp.  $g$ ).

### Proposition :

Si  $f(0) = 0$ , alors la fonction composée  $g \circ f$  admet alors un DL en 0 à l'ordre  $n$ , sa partie régulière ( ou principale) s'obtient en tronquant à l'ordre  $n$ , la composée  $Q_n \circ P_n$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = c_0 + c_1f(x) + c_2f^2(x) + \dots + c_nf^n(x) + o(f^n).$$

 Exemple

Calcul du DL de  $h(x) = \sin(\ln(1+x))$  en 0 à l'ordre 3.

Quand  $x$  tend vers 0,  $\ln(1+x)$  tend vers 0, alors

$$u = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Considérons ensuite l'expression  $y = \sin(u)$ , au voisinage de 0, on a

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

En remplaçant  $u$  par sa valeur, on trouve

$$h(x) = \sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

 Exemple

Développement limité de  $\sqrt{\cos(x)}$  à l'ordre 2 au voisinage de 0 sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

On pose

$$\cos(x) = 1 + u \Rightarrow u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2!}, \text{ Ainsi}$$

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2).$$

D'où,

$$\sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

### 3. Application des développements limités

#### 3.1. Fonctions équivalentes

 Définition

Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont dites équivalentes au voisinage de  $x_0$  ( $x_0$  peut être égal à  $\pm\infty$ ) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . On écrit :  $f \sim_{x_0} g$ .

 Exemple

$$\sin(x) \sim_0 x \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Le développement limité d'une fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$  permet de trouver un équivalent à  $f$  au voisinage de  $x_0$  en prenant le premier terme non nul du DL.

$$1. \ln(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \Rightarrow \ln(1+x) \sim_0 x.$$

$$2. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2). \Rightarrow e^x \sim_0 1 + x.$$

### 3.2. Calcul des limites

L'obtention d'un DL au voisinage de  $x_0$  ( $x_0$  peut être égal à  $\infty$ ) d'une fonction  $f$  permet de calculer d'une manière simple la limite de cette fonction quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

On a

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}.$$

On a

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - (1 + x + \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

Donc,

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}.$$

D'où,

$$\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} = -2 + o(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} = -2.$$

### 3.3. Équation de la tangente

#### Proposition :

Si  $f$  admet un DL au voisinage de  $x_0$  ( $x_0$  fini) de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

Alors,

$y = a_0 + a_1(x - x_0)$  est l'équation de la tangente à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$ .

$a_k(x - x_0)^k$  est le terme indicateur de la position. La position de cette tangente par rapport à la courbe  $(C_f)$  dépend du signe de  $a_k$  et de la parité de  $k$ .

## ?

### Exemple

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction  $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$  au voisinage de  $x = 0$  ainsi que sa position par rapport à la courbe  $(C_f)$ .

$$f(x) = \ln(1 + u), \quad \text{avec } u = x + x^2.$$

Donc,

$$f(x) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Ainsi,

$$f(x) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + o(x^2).$$

D'où,

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi,  $(T) : y = x$  est l'équation de l'asymptote par rapport à la courbe de  $f$ .

Comme  $\frac{1}{2}x^2 \geq 0$ , donc la courbe  $(C_f)$  est au-dessus de l'asymptote  $(T)$ .

## 4. Exercices

### Exercice 1 :

1. Déterminer le DL de  $x^3 - 2x$  au voisinage de 1 à l'ordre  $n = 3$ .
2. Déterminer le DL de  $\sqrt{1 + \sin(x)}$  au voisinage de 0 à l'ordre  $n = 3$ .
3. Déterminer le DL de  $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$  au voisinage de 0 à l'ordre  $n = 4$ .
4. Déterminer le DL de  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$  au voisinage de  $\infty$  à l'ordre  $n = 2$ .

### Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes en utilisant les DL.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) \right)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left( \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{x}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \right)$ .

**Exercice 3 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ .

1. Déterminer le développement limité de  $f$ , à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  et la position de la tangente par rapport à la courbe.

**Exercice 4 :**

1. Calculer le DL à l'ordre 2 en  $x = 2$  de  $f(x) = \ln(x)$  et  $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ .

2. En déduire :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}$ .