Chapitre 6 : Algèbre linéaire

1. Lois et composition interne

1.1. Définitions et propriétés

Définition

Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** (l.c.i) sur E est une application de $E \times E$ dans E.

Si $*$ est le symbole désignant cette l.c.i, l'image de (x, y) est notée $x * y$.

Ainsi, se donner une l.c.i $*$ sur E, c'est se donner une application

$$E \times E \to E$$
$$(x, y) \mapsto x * y.$$

Exemple

- Sur $E = \mathbb{Z}$, l'addition $+$, la multiplication $\times$ et la soustraction $-$ sont des lois de compositions internes.
- La division $\div$ constitue une l.c.i sur l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ (ou sur $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$).

Propriétés :

Dans toute cette section, $(E, *)$ désigne un ensemble muni d'une l.c.i.

Associativité ***Définition***

On dit que $*$ est **associative** lorsque, pour tous $x,\ y,\ z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z.$

Commutativité ***Définition***

On dit que $*$ est **commutative** lorsque, pour tous $x,\ y \in E, x * y = y * x.$

Élément neutre ***Définition***

$*$ admet un élément neutre si, $\exists\, e \in E \ / \ \forall x \in E \ : x * e = e * x = x.$

Symétrique ***Définition***

$*$ admet un élément symétrique dans E si tout éléments de E admet un symétrique dans E, i.e

$\forall x \in E, \exists\, x' \in E \ / \ x * x' = x' * x = e.$

Exemple

Dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on définit la loi de composition $*$ par

$x * y = x + y - 2xy.$

- La loi $*$ est interne sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. En effet,

  soient $x,\ y\ \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, montrons que $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, comme

  $x * y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y - 2xy = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(1-2y) - \frac{1}{2}(1-2y) = 0,$

  $x * y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-2y)(x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ \ ou\ \ x = \frac{1}{2}.$

  D'où

  $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et alors $*$ est une loi interne.

- La loi $*$ est commutative. En effet,

  Soient $x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on a

  $x * y = x + y - 2xy = y + x - 2yx = y * x,$

  donc la loi $*$ est commutative.

- La loi $*$ est associative. Car, pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, on a

  $(x * y) * z = (x + y - 2xy) * z = (x + y - 2xy) + z - 2(x + y - 2xy)z.$

  Ainsi,

  $(x * y) * z = x + (y + z - 2yz) - 2x(y + z - 2yz) = x + (y * z) - 2x(y * z).$

  D'où,

  $(x * y) * z = x * (y * z).$

  donc, la loi $*$ est associative.

- La loi $*$ admet un élément neutre, car

  Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, tel que : $x * e = x$, alors

  $x + e - 2xe = e + x - 2ex = x\ \ \Leftrightarrow e\,(1 - 2x) = 0 \Leftrightarrow e = 0 \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}.$

  Donc la loi $*$ admet comme l'élément neutre élément $e = 0.$

- La loi $*$ admet un élément symétrique. En effet, on a

  Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $x * x' = e$, alors

  $x + x' - 2xx' = 0 \Leftrightarrow x'(1 - 2x) = -x \Leftrightarrow x' = \frac{x}{2x-1}$. (car $x \neq \frac{1}{2}$)

  Donc, l'élément symétrique de x est

  $x' = \frac{x}{2x-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Distributivité — *Définition*

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées Δ et $*$.

On dit que $*$ est distributive par rapport à Δ si :

$\forall x,\ y,\ z \in E,\quad x * (y\Delta z) = (x * y)\ \Delta\ (x * z).$

1.2. Structure de groupe

Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $*$. On dit que $(E, *)$ est un groupe si la loi $*$ satisfait aux trois conditions suivantes :

1. $*$ est une loi de composition interne.
2. $*$ est associative.
3. $*$ admet un élément neutre.
4. Chaque élément de E admet un symétrique pour $*$.

Si de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif ou abélien.

Exemple

1. $(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, *)$, où $*$ la loi définie dans l'exemple précédent, est un groupe.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
3. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symétrique.
4. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Définition

Soit $(E, *)$ un groupe. Une partie $H \subset E$ (non vide) est un sous groupe de E si, la restriction de l'opération $*$ à H lui confère la structure de groupe.

Proposition :

Soit H une partie non vide du groupe $(E, *)$. Alors, H est un sous-groupe de E si, et seulement si

- pour tout $x,\ y \in H$, on a $x * y \in H$.
- pour tout $x \in H$, on a $x' \in H$, avec x' le symétrique de x.

Exemple

$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. En effet,

1. Si $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $x \times y \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'élément symétrique de x noté $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3. Structure d'anneau

Définition

Soit $\mathbb{A}$ un ensemble muni de deux lois de compositions que on noterons Δ et $*$.

On dit que $(\mathbb{A}, \Delta, *)$ est un anneau si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $(\mathbb{A}, \Delta)$ est un groupe commutatif.
2. La loi $*$ est associative.
3. La loi $*$ est distributive par rapport à la loi Δ.

Remarque

- Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que l'anneau $(\mathbb{A}, \Delta, *)$ est commutatif.
- Si la loi $*$ admet un élément neutre, on dit que l'anneau $(\mathbb{A}, \Delta, *)$ est unitaire.

Exemple

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et unitaire.

Définition

Si $(\mathbb{A}, \Delta, *)$ est un anneau et B est une partie de A, on dit que B est un sous-anneau de $\mathbb{A}$ si, B muni des lois induites par $\mathbb{A}$, est lui-même un anneau, c'est-à-dire $(B, \Delta, *)$ est un anneau.

Dans ce qui suit, $\mathbb{A}$ désignera l'anneau $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ avec 0 l'élément neutre de $+$ et s'il est unitaire, 1 serait son unité.

Proposition : "Caractérisation des sous anneaux"

Une partie B de l'anneau $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{A}$ si et seulement si

1. Pour tous $a, b \in B,\ a + (-b) \in B.$
2. Pour tous $a, b \in B,\ a \times b \in B.$

Exemple

L'ensemble $2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. En effet,

soient $x,\ y \in 2\mathbb{Z}$, il existe $n, m \in \mathbb{Z}$, tels que : $x = 2n$ et $y = 2m$, et on a

$x - y = 2(n - m) \in 2\mathbb{Z}$ et $xy = 2(2nm) \in 2\mathbb{Z}$.

1.4. Structure d'un corps

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux lois de compositions toujours notées Δ et $*$.

On dit que $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ est un corps si les conditions suivantes sont remplies

1. $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ est un anneau.
2. $(\mathbb{K} \setminus \{e\}, \Delta)$ est un groupe, où e est l'élément neutre de $*$.

Si de plus Δ est commutative, On dit que $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ est un corps commutatif.

Exemple

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, car

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.
3. La loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Définition

Soient $(\mathbb{K}, \Delta, \times)$ un corps et H un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$. On dit que $(H, \Delta, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{K}, \Delta, \times)$ si

1. (H, Δ) est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K}, \Delta)$.
2. $(H \setminus \{e_\Delta\}, \Delta)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K} \setminus \{e_\Delta\}, \times)$.

Exemple

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2. Espace vectoriel

2.1. Définitions et propriétés élémentaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne notée (+) tq

$$\begin{aligned}(+) : E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y\end{aligned}$$

et d'une loi externe notée $(\cdot)$

$$\begin{aligned}(\cdot) : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda, y) &\mapsto \lambda \cdot y\end{aligned}$$

Définition

Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$- espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$
3. $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$
4. $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda\, \mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x).$
5. $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$ ($1_{\mathbb{K}}$ est l'élement neutre de $\times$ dans $\mathbb{K}$)

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.

Exemple

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel.
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.

Proposition :

Si E est $\mathbb{K}$- espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes

1. $\forall x \in E,\ 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.
2. $\forall x \in E,\ (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x = -x$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in E,\ \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}\ ou\ x = 0_E$.

Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel et soit F un sous-ensemble non vide de E.

On dit que F est sous espace vectoriel si $(F, +, \cdot)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème :

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel et $F \subset E, F \neq \emptyset$ on a les équivalences suivantes

1. F est un sous espace vectoriel de E.
2. F est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :

   $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x,\ y \in F\ :\ \lambda \cdot x \in F\ \ et\ \ x + y \in F.$

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ (l'ensemble de tous les polynômes de degré $\leq n$), on définie le sous ensemble H par

$H = \{P \in E\ : P = ax^2,\ a \in \mathbb{R}\}$.

H est un sous-espace vectoriel de E, car

1. Pour $a = 0$, on a : $P = 0 \cdot x^2 = 0_E \in H$.
2. Soient $P,\ Q \in H,\ \exists a,\ b \in \mathbb{R}\ /\ P = ax^2$ et $Q = bx^2$. Alors

   $P + Q = (a + b) \cdot x^2 \in H$.
3. Soient $P \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $P = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$, alors : $\lambda \cdot P = \lambda ax^2 = bx^2$ avec $b = \lambda a \in \mathbb{R}$, donc $\lambda P \in H$.

Proposition :

L'intersection d'une famille non vide de sous espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Remarque

La réunion de deux sous-espace vectoriel n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.

Exemple

Soient $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ : x = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ : y = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^2$, $F_1\ \cup F_2$ n'est un sous-espace vectoriel, car

Pour $u_1 = (0, 1) \in F_1,\ u_2 = (1, 0)\ \in F_2$, on trouve

$u_1 + u_2 = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

2.2. Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition

Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle somme des deux sous-espaces vectoriels, E_1 et E_2, que l'on note $E_1 + E_2$, l'ensemble suivant

$E_1 + E_2 = \{x \in E : \exists\, x_1 \in E_1, \exists\, x_2 \in E_2 \ \ tel\ que\ x = x_1 + x_2\}.$

Remarque

De plus, $E_1 + E_2$ est un s.e.v de E, donc on a toujours $E_1 + E_2 \subset E$.

Exemple

Soient les deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ définie par

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : y = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$(x,y) = (x,0) + (0,y),$

donc,

$(x,y) \in E_1 + E_2,$

d'où

$\mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2$ et comme $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^2$, alors on a égalité.

2.3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition

Soient E_1 , E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

On écrit $E_1 \oplus E_2$.

Proposition :

Soient E_1 , E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

La somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si pour tout $x \in E_1 + E_2$, il existe un unique vecteur $x_1 \in E_1$, un unique vecteur $x_2 \in E_2$, tel que $x = x_1 + x_2$.

Exemple

Soients $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x = 0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : y = z = 0\}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors : $(x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0) \in F_1 + F_2$, d'où

  $F_1 + F_2 \supset \mathbb{R}^3$ et on a $F_1 + F_2 \subset \mathbb{R}^3$, donc

  $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$
- Soit $(x,y,z) \in F_1 \cap F_2$, alors $(x,y,z) \in F_1$ et $(x,y,z) \in F_2$, ça signifie que

  $x = 0$ et $y = z = 0$, alors

  $(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire $F_1 \cap F_2 \subset \{0\}$, et on a toujours $\{0\} \subset F_1 \cap F_2$.

Enfin, on conclus que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

2.4. Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par E.

Définition

Soit E un espace vectoriel et $e_1, e_2, ..., e_n$ des éléments de E.

1. On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille **libre** (ou les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ sont **linéairement indépendants)**, si

   $\forall \lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\lambda_n \in \mathbb{K}\ : \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$

   Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ sont **liés**.
2. On dit que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille **génératrice** de E, ou que E est engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ si

   $\forall x \in E,\ \exists \lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\lambda_n \in \mathbb{K},\ x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$
3. Si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une famille libre et génératrice de E, alors $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est appelée une **base** de E.

Exemple

Sur $\mathbb{R}^2$, on pose : $u_1 = (1,0),\ u_2 = (1,-1)$, alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet,

- $\{u_1, u_2\}$ est libre. Soient $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \quad &\Rightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,-1) = (0,0),\\ &\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2) = (0,0),\\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.\end{aligned}$$

- $\{u_1, u_2\}$ est génératrice. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

  $(x,y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2) \Rightarrow \alpha_2 = -y \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 = x + y \in \mathbb{R}$,

  donc, il existe $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}\ /\ (x,y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

Remarque

Dans un espace vectoriel E, tout vecteur v non nul est linéairement indépendant, donc la famille $\{v\}$ est libre.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, on appelle **dimension** de E, noté $dim(E)$ le nombre défini par $dim(E) = Card(B) = n$,

où $Card(B)$ est le cardinal de B.

Exemple

On pose $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$, alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc

$dim\ (\mathbb{R}^3) = Card\ (\{e_1, e_2, e_3\}) = 3.$

3. Application linéaire

3.1. Définitions

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes

- $\forall x,\ y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y),$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x),$

où, d'une manière équivalente

- $\forall x,\ y \in E, \forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{K},\ f(\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot y) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot f(y).$

Remarque

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E, F)$.

Exemple

L'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x - y, \end{array}$$

est une application linéaire, car

Pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda_1(x, y) + \lambda_2(x', y')) & = & f(\lambda_1 x + \lambda_2 x', \lambda_1 y + \lambda_2 y'), \\ & = & \lambda_1 x + \lambda_2 x' - \lambda_1 y - \lambda_2 y', \\ & = & \lambda_1(x - y) + \lambda_2(x' - y'), \\ & = & \lambda_1 f(x, y) + \lambda_2(x', y'). \end{array}$$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f\ : E \to F$ une application. On dit que

1. f est un **isomorphisme**, si f est linéaire et bijective.
2. f est un **endomorphisme**, si f est linéaire avec $E = F$.
3. f est un **automorphisme**, si f est un endomorphisme bijective.

Exemple

L'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = -2x, \end{array}$$

est un automorphisme. En effet, soient $x,\ y,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a

$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = -2(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1(-2x) + \lambda_2(-2y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y).$

L'application f est bijective, donc f^{-1} existe et on a

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{-1}{2}x. \end{array}$$

3.2. Noyau, image et rang d'une application linéaire

Définition

Soit f une application linéaire de E dans F.

- L'ensemble $f(E)$ s'appelle **l'image** de l'application linéaire f et est noté Imf, donc $Imf = \{f(x) \ : x \in E\}$.
- L'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ s'appelle le **noyau** de l'application linéaire f et est noté $Kerf$, donc $Kerf = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$.

Proposition :

Soit f une application linéaire de E dans F, alors

1. Imf est un sous-espace vectoriel de F.
2. $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$ une application linéaire définie par $f(x, y) = x - y$.

- Le noyau de l'application linéaire f est
  $Kerf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{x(1, 1) \ : x \in \mathbb{R}\}$,
  donc Kerf est un sous-espace vectoriel engendré par $e = (1, 1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{e\}$.
- L'image de l'application linéaire f
  $Imf = \{f(x, y) \ : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x - y \ : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}$.

Définition

Soit f une application linéaire de E dans F, si $dim(Imf) = n < +\infty$, alors n est appelé **le rang** de f et on le note **rg (f)**.

Proposition :

Soit f une application linéaire de E dans F. On a les équivalences suivantes

1. f est surjective $\Leftrightarrow \ Imf = F$.
2. f est injective $\Leftrightarrow \ Kerf = \{0_E\}$.

Exemple

Soit f définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = (-x + y, x - z, y). \end{array}$$

On a

$Im\ f = \{f(x, y, z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x + y, x - z, y,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

Ainsi,

$Im\ f = f\{x(-1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,-1,0),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

D'où,

$Im\ f \equiv Vect\{(-1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,-1,0)\}$,

et

$Ker\ f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

Ainsi,

$Ker\ f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (-x+y, x-z, y) = (0,0,0)\}$.

D'où,

$Ker\ f = \{(0,0,0)\}$,

alors $Imf = \mathbb{R}^3$ et $Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc f est bijective.

Proposition :

Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E finie. Alors, on a

$dim\ E = \ dim\ Ker(f) + dim\ Im(f)$.

Corollaire :

Soient $E,\ F$ des $\mathbb{K}$-e.v et f est une application linéaire de E vers F avec $dim\ E < +\infty$.

- Si l'application linéaire f est injective alors $dim\ E \leq dim\ F$.
- Si l'application linéaire f est surjective alors $dim\ E \geq dim\ F$.
- Si l'application linéaire f est bijective alors $dim\ E = dim\ F$.

Exemple

Soit f définie par

$$\begin{array}{llll} f\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x + 2y. \end{array}$$

On a

$Ker\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$.

Ainsi,

$Ker\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = -2y\} = \{(-2y,y),\ y \in \mathbb{R}\}$.

D'où,

$Ker\ f = \{y(-2,1),\ y \in \mathbb{R}\} \equiv vect\ \{(-2,1)\}$.

Alors,

$dim\ Kerf = 1$, et comme $dim\ \mathbb{R}^2 = 2$, donc

$dim\ Imf = \ dim\ \mathbb{R}^2 - \ dim\ Kerf = 2 - 1 = 1$.

Théorème :

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies. Si f est une application linéaire de E vers F, alors

- f est injective ssi $rg\ (f) = dim\ E$.
- f est surjective ssi $rg\ (f) = dim\ F$.
- f est bijective ssi $rg\ (f) = dim\ E = dim\ F$.

4. Exercices

Exercice 1 :

On définit sur $G =]-1, 1[$, la loi interne $*$ comme suit :

$\forall (x, y) \in G \times G \ : \ x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 :

On considère : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \ : a, \ b \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble E défini par :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E.

Exercice 4 :

Soit $f \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z), \ pour \ \ tout \ \ (x, y, z) \ \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker\ (f)$.

Exercice 5 :

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker\ (f)$ et $Im\ (f)$ et donner leurs dimension.
3. f est-elle bijective ?

Exercice 6 :

Soit f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par : $f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $ker\ (f) \oplus Im\ (f) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 7 :

On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ la loi de composition interne Δ par : $x\Delta y = x + y - xy$.

Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \Delta)$ est un groupe abélien.

Exercice 8 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble F défini par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F, quelle est sa dimension ?
3. F est-il égale à $\mathbb{R}^3$?