Corollaire :

- Si l'application linéaire f est injective alors $dim\ E \leq dim\ F$.
- Si l'application linéaire f est surjective alors $dim\ E \geq dim\ F$.
- Si l'application linéaire f est bijective alors $dim\ E = dim\ F$.

Proposition :

Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E est finie, on a :

$$dim\ E = dim\ Ker(f) + dim\ Im(f)$$

Exemple

Soit f définie par :

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x + 2y. \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{lcl} Kerf & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 0\}, \\ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}, \\ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = -2y\}, \\ & = & \{(-2y, y),\ y \in \mathbb{R}\}, \\ & = & \{y(-2, 1),\ y \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Alors,

$dim\ Kerf = 1$, et comme $dim\ \mathbb{R}^2 = 2$, donc :

$$dim\ Imf = dim\ \mathbb{R}^2 - dim\ Kerf = 2 - 1 = 1.$$

Théorème :

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension fini. Si f est une application linéaire de E vers F, alors :

- f est injective ssi $rg\ (f) = dim\ E$.
- f est surjective ssi $rg\ (f) = dim\ F$.
- f est bijective ssi $rg\ (f) = dim\ E = dim\ F$.

4. Exercices

Exercice 1 :

On définit sur $G =]-1; 1[$, la loi interne $*$ comme suit :

$$\forall (x, y) \in G \times G\ :\ x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 :

On considère : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ : a,\ b \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.

Exercice 3 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble E défini par :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E.

Exercice 4 :

Soit $f \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z), \ pour \ \ tout \ \ (x, y, z) \ \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker \ (f)$.

Exercice 5 :

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker \ (f)$ et $Im \ (f)$ et donner leur dimension.
3. f est-elle bijective ?

Exercice 6 :

Soit f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par : $f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $ker \ (f) \oplus Im \ (f) = R^4$?

Exercice 7 :

On définit sur $\mathbb{R} - \{1\}$ la loi de composition interne $*$ par : $x\Delta y = x + y - xy$.

Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \Delta)$ est un groupe abélien.

Exercice 8 :

On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble F défini par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F, quelle est sa dimension ?
3. F est-il égale à $\mathbb{R}^3$?