Université Oran 1 Ahmed Ben Bella
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
L1 - informatique (2025/2026)

Fiche de TD 1 Algèbre 2

Espaces vectoriels

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $+$ et $\otimes$ de la manière suivante :

-: $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^*$: $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$

-: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces lois est-il un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ?

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.

(1) $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \geq 1\}$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
(2) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y=0\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
(3) $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est croissante}\}$ dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(4) $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : x^2P'' - 3xP' + P = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3.

(1) On considère les vecteurs $u = (1,3,0)$ et $v = (3,2,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $(4,5,1)$ et $(1,-3,0)$ sont-ils combinaisons linéaires de u et v ?
(2) Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = 4X^3 + X^2 - 5$ est-il combinaison linéaire de X^3+X^2, X^3-X et $X+1$?

Exercice 4. Déterminer les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs $u_1 = (1,0,t)$, $u_2 = (1,1,t)$ et $u_3 = (t,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5. On désigne par $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3.

(1) Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = \left(1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\right)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Donner les coordonnées du polynôme $P = 3X - X^2 + 8X^3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y=3z\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner deux vecteurs u et v non colinéaires de F.
(3) Soit $w = (1,0,0)$ et $G = vect(w)$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des sous-ensembles de E constitués des fonctions paires et impaires respectivement. Montrer que

(1) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E
(2) $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, donner le rang des vecteurs v_1, v_2, v_3 dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3.

(1) $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (3,0,-1),\ v_3 = (-1,1,-1)$.
(2) $v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (3,0,-1),\ v_3 = (1,8,13)$.

Corrigé

Corrigé 1. *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *alors* $(\lambda+\mu)\otimes(x,y)\neq\lambda\otimes(x,y)+\mu\otimes(x,y)$ *car*

$$(\lambda+\mu)\otimes(x,y)=((\lambda+\mu)x,(\lambda+\mu)^2y)=((\lambda+\mu)x,(\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu)y)$$
$$\lambda\otimes(x,y)+\mu\otimes(x,y)=(\lambda x+\mu x,\lambda^2y+\mu^2y)$$

Ainsi $\mathbb{R}^2$ *muni des lois* $+$ *et* $\otimes$ *n'est pas un espace vectoriel.*

Corrigé 2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel, et* F *un sous-ensemble de* E*. On rappelle que* F *est sous-espace vectoriel de* E *si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

$$0_E\in F$$
$$\forall x,y\in F,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \lambda x+\mu y\in F.$$

(1) E_1 *n'est pas un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *car* $(0,0)\notin E_1$.

(2) Soient $(x,y,z),(x',y',z')\in E_3$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *alors*

(a) $(0,0,0)\in E_2$ *;*

(b) $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\in E_2$ *car*

$$\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'=\lambda(x+y)+\mu(x'+y')=\lambda.0+\mu.0=0$$

Ainsi E_2 *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(3) Soient $f,g\in E_3$*, alors* $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\geq y\Rightarrow f(x)\geq f(y)\ \wedge\ g(x)\geq g(y)$. *Soient* $\lambda=\mu=-1\in\mathbb{R}$ *alors* $\lambda f(x)+\mu g(x)=-f(x)-g(x)\leq -f(y)-g(y)$, *ce qui montre que* $\lambda f(x)+\mu g(x)\notin E_3$*. Ceci prouve que* E_3 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(4) Soit l'espace $E_4=\{P\in\mathbb{R}_2[X]: x^2P''-3xP'+P=0\}$*. Soient* $P,Q\in E_4$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*. Montrons que* E_4 *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$.

(a) on a $x^2.0-3x.0+P=0$ *donc* $P=0$ *vérifie* $x^2P''-3xP'+P=0\ \Rightarrow\ 0\in E_4$ *;*

(b)

$$\begin{aligned}P,Q\in E_5 &\Rightarrow\ x^2P''-3xP'+P=0\ \wedge\ x^2Q''-3xQ'+Q=0\\ &\Rightarrow\ x^2\lambda P''-3x\lambda P'+\lambda P=0\ \wedge\ x^2\mu Q''-3x\mu Q'+\mu Q=0\\ &\Rightarrow\ x^2(\lambda P)''-3x(\lambda P)'+(\lambda P)=0\ \wedge\ x^2(\mu Q)''-3x(\mu Q)'+(\mu Q)=0\\ &\Rightarrow\ x^2(\lambda P+\mu Q)''-3x(\lambda P+\mu Q)'+(\lambda P+\mu Q)=0\\ &\Rightarrow \lambda P+\mu Q\in E_5.\end{aligned}$$

Corrigé 3. *(1)* $(4,5,1)$ *est combinaison linéaire de* u *et* v *ssi il existe* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *tel que* $(4,5,1)=\lambda u+\mu v$*. Or*

$$\lambda u+\mu v=\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+3\mu\\3\lambda+2\mu\\0\end{pmatrix}$$

En identifiant la troisième coordonnée, on obtient $1=0$ *ce qui est impossible, donc* $(4,5,1)$ *n'est combinaison linéaire de* u *et* v.
On peut par contre trouver $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}=\lambda u+\mu v=\begin{pmatrix}\lambda+3\mu\\3\lambda+2\mu\\0\end{pmatrix}$$

En effet, on vérifie aisément que le système $\begin{cases} \lambda + 3\mu = 1 \\ 3\lambda + 2\mu = -3 \end{cases}$ *possède une solution unique. Ainsi* $(1, -3, 0)$ *est combinaison linéaire de* u *et* v.

(2) *Le polynôme* $P = 4X^3 + X^2 - 5$ *est combinaison linéaire de* $X^3 + X^2, X^3 - X$ *et* $X + 1$ *ssi il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $P = a(X^3 + X^2) + b(X^3 - X) + c(X + 1) = (a + b)X^3 + aX^2 + (c - b)X + c$. *Cette relation est équivalente au système suivant*

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a = 1 \\ c - b = 0 \\ c = -5 \end{cases}$$

On voit clairement que les équations du système sont incompatibles. Ainsi P *n'est pas combinaison linéaire des polynômes proposés.*

Corrigé 4. *On sait que* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *et que toute famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *à trois éléments est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Il suffit donc de trouver les valeurs de* t *pour lesquelles la famille formée des vecteurs* u_1, u_2 *et* u_3 *est libre. Soient* $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(1, 0, t) + b(1, 1, t) + c(t, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a + b + tc, b, at + bt + c) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + tc = 0 \\ b = 0 \\ at + bt + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + tc = 0 \\ at + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (-tc)t + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (t^2 - 1)c = 0 \end{cases}$$

Alors $a = b = c = 0$ *si* $t \neq \pm 1$. *Dans ce cas la famille* (u_1, u_2, u_3) *est libre et est donc aussi une base de* $\mathbb{R}^3$.

Corrigé 5. (1) *On a* $dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, *alors* $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *si et seulement si elle est libre. Montrons donc la liberté de la famille* $\mathcal{B}'$. *Considérons une combinaison linéaire nulle*

$$\alpha 1 + \beta(1 - X) + \gamma(X - X^2) + \delta(X^2 - X^3) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$

cette équation est équivalente à

$$-\delta X^3 + (\delta - \gamma)X^2 + (\gamma - \beta)X + \beta + \alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\delta = 0 \\ \delta - \gamma = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

La combinaison linéaire considérée est donc triviale. Ainsi la famille $\mathcal{B}'$ *est libre et donc c'est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.

(2) *Posons* $P = \alpha 1 + \beta(1 - X) + \gamma(X - X^2) + \delta(X^2 - X^3)$ *et résolvons l'équation pour* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

$$3X - X^2 + 8X^3 = -\delta X^3 + (\delta - \gamma)X^2 + (\gamma - \beta)X + \beta + \alpha$$

on obtient par identification des coefficients le système suivant

$$\begin{cases} -\delta = 8 \\ \delta - \gamma = -1 \\ \gamma - \beta = 3 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = -8 \\ \gamma = \delta + 1 = -7 \\ \beta = \gamma - 3 = -10 \\ \alpha = -\beta = 10 \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (10, -10, -7, -8)$.

Corrigé 6. *(1) On a*

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 3z\} \\ &= \{(x, y, \frac{x+2y}{3}) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, \frac{1}{3}) + y(0, 1, \frac{2}{3}) \in \mathbb{R}^3,\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= vect\big((1, 0, \frac{1}{3}), (0, 1, \frac{2}{3})\big) \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

(2) Les vecteurs qu'on vient de trouver ne sont pas colinéaires. Il est à noter qu'il y a une infinité de possibilités. On a donc $u = (1, 0, \frac{1}{3})$ et $v = (0, 1, \frac{2}{3})$ ce qui montre que $F = vect(u, v)$.

(3) Considérons la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. On veut montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit alors un vecteur quelconque $u' = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche à montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u' = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$ c'est à dire

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 = y \\ \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 = z \end{cases}$$

Ce système possède une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (3z - 2y, y, x - 3z + 2y)$. Ainsi tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Finalement, comme $F = vect(u, v)$ et $G = vect(w)$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Corrigé 7. *(1) Il est facile de démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.*

(2) Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-espaces vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, constitués des fonctions paires et impaires respectivement. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Comme $f \in \mathcal{P}$, alors $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et comme $f \in \mathcal{I}$, alors $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x)$$

d'où $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, f est donc la fonction nulle. Ainsi

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se décompose en une fonction paire et une fonction impaire. En effet :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{h(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{g(x)}$$

La fonction $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire car $h(-x) = h(x)$, et la fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est impaire car on voit bien que $g(-x) = -g(x)$. Donc $\mathcal{P} + \mathcal{I} = E$, ce qui prouve que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$.

Corrigé 8. *Le rang d'une famille de vecteurs $B = (v_1, ..., v_n)$ est, par définition, la dimension du sous espace engendré par cette famille. Et on sait aussi d'après un résultat du cours que si $dimE = n$ alors*

$$B \text{ est une base} \Leftrightarrow B \text{ est libre ou génératrice}$$

(1) *Soit la famille B composée des vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$ et $v_3 = (-1, 1, -1)$, calculons le rang de cette famille. Soient α, β et γ des scalaires réels et considérons la combinaison linéaire $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ alors*

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha + 3\beta - \gamma = 0\\ \alpha + \gamma = 0\\ \alpha - \beta - \gamma - = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4\beta = 0\\ \alpha = \gamma\\ \alpha = -\gamma\end{cases}$$

ce qui implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille est libre ce qui montre que $rg(B) = 3$, et comme $dim\mathbb{R}^3 = 3$, alors B est une base. Le sous espace engendré par la famille B coïncide avec $\mathbb{R}^3$, autrement dit

$$vect(B) = vect(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3.$$

(2) *De même, on résout la combinaison linéaire nulle $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$, on obtient*

$$\begin{cases}\alpha + 3\beta + \gamma = 0\\ 2\alpha + 8\gamma = 0\\ 3\alpha - \beta + 13\gamma = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = -4\gamma\\ \beta = \gamma\\ \gamma \in \mathbb{R}\end{cases}$$

le système ci-dessus admet donc une solution non triviale, ce qui veut dire que la famille B est liée donc $rg(B) \leqslant 2$. On peut montrer facilement que la famille (v_1, v_2) est libre, et ce en résolvant la combinaison linéaire $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. On obtiendra donc $rg(v_1, v_2) = 2$. En conclusion

$$vect(v_1, v_2, v_3) = vect(v_1, v_2)$$

Déterminons le sous espace $vect(v_1, v_2)$. Soit $u = (x, y, z) \in vect(v_1, v_2)$, il existe alors deux scalaires reels α et β tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$, ce qui implique

$$\begin{cases}x = \alpha + 3\beta\\ y = 2\alpha\\ z = 3\alpha - \beta\end{cases} \Rightarrow x - 5y + 3z = 0$$

Il s'agit donc du plan d'équation $x - 5y + 3z = 0$. *Ainsi*

$$vect(v_1, v_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 5y + 3z = 0\}.$$

Responsable de matière : kebli S