Université Oran 1 Ahmed Ben Bella
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
L1 Informatique (2025/2026)

Fiche de TD 2 Algèbre 2- Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+2y \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,-1+2x,y) \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P+P' \end{array}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-2x+y+z,\ x-2y+z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.
(2) Donner une base de $\ker f$, en déduire $\dim(\operatorname{Im} f)$.
(3) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
(4) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$g(x,y) = (x+2y,-y).$$

Calculer $g \circ f$.

Exercice 3. Soit l'endomorphisme linéaire suivant

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (x+y-z, x-y+z, -x+y-z)$$

(1) Trouver une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$, ainsi que leur dimension.
(2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On définit une application $f : E \longrightarrow E$ par :

$$f(P) = P' + 3xP''$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Trouver une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$, ainsi que leurs dimensions.
3. Est ce que $\mathbb{R}_2[X] = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?

Exercice 5. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(1) Démontrer qu'il existe une application linéaire unique $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(e_1) = \varepsilon_1, \quad f(e_1+e_2) = \varepsilon_2, \quad f(e_1+e_2+e_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

(2) Expliciter $f(x,y,z)$ pour tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(3) Déterminer le noyau et l'image de f puis donner une base de ces espaces.
(4) f est-elle injective ? surjective ?

Corrigé fiche 2 (Applications linéaires)

Solution 1. — Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_1\big(\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2)\big) &= f_1\big((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)+(\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2)\big) \\ &= f_1(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2) \\ &= \alpha x_1+\beta x_2+2(\alpha y_1+\beta y_2) \\ &= \alpha(x_1+2y_1)+\beta(x_2+2y_2) \\ &= \alpha f_1(x_1,y_1,z_1)+\beta f_1(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_1 est une application linéaire. En particulier, il s'agit d'une forme linéaire.

— f_2 n'est pas linéaire car

$$f_2\big((1,0,2)+(2,-2,1)\big) = f_2(3,-2,3) = -6$$

alors que

$$f_2(1,0,2)+f_2(2,-2,1) = -4 \neq -6$$

— f_3 n'est pas linéaire. En effet, $\exists (2,1),(3,5) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f_3\big((2,1)+(3,5)\big) = f_3(5,6) = -11 \quad \text{alors que} \quad f_3(2,1)+f_3(3,5) = 3-16 = -13$$

— f_4 n'est pas linéaire car $f_4(0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$

—

$$\begin{aligned} f_5(\alpha P+\beta Q) &= 2(\alpha P+\beta Q)+(\alpha P+\beta Q)' \\ &= 2\alpha P+2\beta Q+\alpha P'+\beta Q' \\ &= \alpha(2P+P')+\beta(2Q+Q') \\ &= \alpha f_5(P)+\beta f_5(Q) \end{aligned}$$

ce qui montre que f_5 est linéaire.

Solution 2. (1) Les composantes de $f(x,y,z) = (-2x+y+z,\ x-2y+z)$ sont des combinaisons linéaires de x, y, z. Donc f est une application linéaire.

(2) Par définition,

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\}.$$

Ainsi

$$f(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\ker f = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}, \qquad \dim(\ker f) = 1.$$

Par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im} f) = 3-1 = 2.$$

(3) Par définition,

$$\mathrm{Im} f = \{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

On calcule

$$f(1,0,0) = (-2,1), \qquad f(0,1,0) = (1,-2).$$

Donc une base de Imf est

$$\{(-2,1),(1,-2)\}.$$

(4)

$$g \circ f(x,y,z) = g(-2x+y+z,\ x-2y+z)$$

$$= (3(z-y), -x+2y-z).$$

Solution 3. (1) On a $ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$ d'où

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+y-z, x-y+z, -x+y-z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

d'où $ker(f) = \{(0,y,y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,1)/y \in \mathbb{R}\} = vect((0,1,1))$ donc $(u_1 = (0,1,1))$ représente une base de $ker(f)$ et $dim(ker(f)) = 1$

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x+y-z, x-y+z, -x+y-z)/x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\underbrace{(1,1,-1)}_{u} + y\underbrace{(1,-1,1)}_{v} + z\underbrace{(-1,1,-1)}_{w}/x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= vect\{u,v,w\} \end{aligned}$$

donc $Im(f)$ est engendré par trois vecteurs, alors qu'on sait déja que $dim(Im(f)) = 2$ car $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(ker(f)) = 2$. Or on peut voir que $v = -w$ d'où $Im(f) = vect(u,w)$, de plus u et w sont linéairement indépendants donc une base de $Im(f)$ est donnée par (u,v).

(2) On rappelle que $Im(f)$ et $ker(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donc pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de montrer que la réunion de leurs bases forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, comme $dim\mathbb{R}^3 = 3$ et $Card(u_1,u,v) = 3$ alors pour montrer que la famille $\big((0,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\big)$ est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u + \gamma v = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Donc $\big((0,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = ker(f) \oplus Im(f)$.

Solution 4. Soit l'application

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto f(P) = P' + 3XP'' \end{aligned}$$

(1) Montrons que f est une application linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)' + 3x(\alpha P + \beta Q)'' \\ &= \alpha P' + \beta Q' + 3x(\alpha P'' + \beta Q'') \\ &= \alpha(P' + 3xP'') + \beta(Q' + 3xQ'') \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

ainsi f est bien une application linéaire.

(2) On a $ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/f(P) = 0\}$. Soit donc $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ d'où $P'(X) = 2aX + b$ et $P''(X) = 2a$ donc

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow f(P) = 2aX + b + 6aX = 8aX + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

Ainsi $ker(f) = \{c \in \mathbb{R}\}$ c'est l'espace vectoriel engendré par le polynôme constant 1, il est donc de dimension 1.
On a $Im(f) = \{P' + 3xP''/P \in \mathbb{R}_2[X]\}$ d'après les calculs de la réponse précédente on a

$$Im(f) = \{8aX + b/\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

$Im(f)$ est donc l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs, à savoir 1 et X, et comme $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}_2[X]) - dim(ker(f)) = 3 - 1 = 2$, alors les polynômes 1 et X sont forcément linéairement indépendants, ils forment donc une base de $Im(f)$.

(3) $Im(f)$ et $ker(f)$ ne sont pas en somme directe car la réunion de leurs bases est $\{1, X, 1\} = \{1, X\}$, qui ne peut jamais être une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution 5. (1) Il suffit de vérifier que $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, pour cela on montre qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ est une famille de trois vecteurs libre dans un espace de dimension 3, il s'agit donc d'une base de cet espace.

(2) Exprimons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction de la base $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ alors

$$\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2) + \gamma(e_1 + e_2 + e_3) = (x, y, z) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma = y \\ \gamma = z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha = x - \beta - \gamma \\ \beta = y - \gamma \\ \gamma = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x-y)f(1,0,0) + (y-z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \\ &= (x-y)(1,0) + (y-z)(0,1) + z(1,1) \\ &= (x-y+z,y). \end{aligned}$$

(3) Par définition $ker(f) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| f(x,y,z) = (0,0)\big\}$

$$f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

Ce qui implique $ker(f) = \big\{(x,0,-x),\ x \in \mathbb{R}\big\} = vect\big\{(1,0,-1)\big\}$. En particulier, $Dim(ker(f)) = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned} Im(f) &= \big\{(x-y+z,y) \bigm| (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big\} \\ &= vect\big\{(1,0),(-1,1),(1,0)\big\} \\ &= vect\big\{(1,0),(-1,1)\big\}. \end{aligned}$$

On montre aisément que ces deux vecteurs sont libres et donc ils forment une base de $Im(f)$.

(4) $ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f n'est pas injective. Et on a :

$$\dim\big(Im(f)\big) = 2 = \dim\big(\mathbb{R}^2\big) \text{ et } Im(f) \subset \mathbb{R}^2$$

Donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$ et ainsi f est surjective.