UNIVERSITÉ ORAN 1 AHMED BEN BELLA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUÉES
L1 INFORMATIQUE (2025/2026)

Fiche de TD 3 Algèbre 2

Matrices - Déterminants - Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1. (1) Pour chaque cas suivant, écrire la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ définie par :

1) $a_{ij} = i + 2j$, 2) $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$, 3) $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j \end{cases}$

(2) On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits suivants (si ils existent) :AB, BA, AD, CF, EF, $A+2F$.

Exercice 2. (1) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) En déduire le rang de ces matrices.

(3) Trouver leurs matrices transposées ainsi que leurs traces.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur (x_1, x_2, x_3) associe

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3)$$

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$
$$u_1 = (1,0,-1),\ u_2 = (1,-1,0),\ u_3 = (1,1,1)$$

Expliciter les matrices $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathbf{M}_{\mathcal{C}}(f)$, $\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définies par :

$$e'_1 = e_1 + 2e_2, \quad e'_2 = e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + e_3.$$

(1) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

(2) Calculer P^{-1}.

(3) Soit $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Calculer $[v]_{\mathcal{B}'}$.

Exercice 5. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Solutions Fiche de TD 3 Algèbre 2

Solution de l'exercice 1. (1) **1)** $a_{ij} = i + 2j$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Dimensions :

$$A(2 \times 3),\ B(3 \times 1),\ C(2 \times 2),\ D(3 \times 3),\ E(3 \times 2),\ F(2 \times 3)$$

AB **:**

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1(-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

BA **:** non défini.

AD **:**

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

CF **:**

$$CF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EF **:**

$$EF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + 2F$ **:**

$$A + 2F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2. (1) **Inversibilité et calcul des inverses**

Matrice A :

Calcul du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \\ &= 1 \cdot (2 - 1) - 1 \cdot (1 - 2) + 2 \cdot (1 - 4) = 1 + 1 - 6 = -4 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc A est inversible.

Calcul de A^{-1} par la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{com}(A)^T$.

Cofacteurs :

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$
$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Matrice complémentaire :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Matrice B :

Calcul du déterminant :

$$\det(B) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4-0) + 2 \cdot (2-0) = -4 + 4 = 0.$$

Donc B n'est pas inversible.

(2) **Rang des matrices**

Rang de A : $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 3$.

Rang de B : $\det(B) = 0$ donc $\mathrm{rg}(B) \leq 2$. La sous-matrice formée des lignes 1 et 2, colonnes 1 et 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $-1 \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(B) = 2$.

(3) **Transposée et trace**

Pour A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \text{(symétrique)},$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Pour B :

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Tr}(B) = 0 + 1 + 4 = 5.$$

Solution de l'exercice 3. On a entre les vecteurs de $\mathcal{B}$ et ceux de $\mathcal{C}$ les relations suivantes

$$(S_1)\quad \begin{cases} u_1 = e_1 - e_3 \\ u_2 = e_1 - e_2 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) \\ e_2 = \frac{1}{3}(u_1 - 2u_2 + u_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(-2u_1 + u_2 + u_3) \end{cases}$$

Pour calculer la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$, il faut calculer les trois vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, et les exprimer par rapport aux trois vecteurs e_1, e_2 et e_3. On a

$$\begin{cases} f(e_1) = (2,1,1) = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) = (1,2,1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_3) = (1,1,2) = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Pour calculer la matrice relative à la base $\mathcal{C}$, on commence par calculer les vecteurs $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ et les exprimer à l'aide du système (S_1) en fonction de u_1, u_2 et u_3

$$\begin{cases} f(u_1) = (1,0,-1) = e_1 - e_3 = u_1 \\ f(u_2) = (1,-1,0) = e_1 - e_2 = u_2 \\ f(u_3) = (4,4,4) = 4e_1 + 4e_2 + 4e_3 = 4u_3 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

Pour calculer la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, il faut décomposer les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ et les exprimer en fonction de u_1, u_2 et u_3, et ce à l'aide du système (S_2)

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + 4u_3) \\ f(e_2) = \frac{1}{3}(u_1 - 2u_2 + 4u_3) \\ f(e_3) = \frac{1}{3}(-2u_1 + u_2 + 4u_3) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

On en conclut que ces trois matrices, bien que différentes, représentent néanmoins le même endomorphisme.

Solution de l'exercice 4. (1) Les colonnes de P sont les coordonnées de (e'_1, e'_2, e'_3) dans $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\det(P) = 1(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 1(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 3$$

Donc P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 5. The associated matrix is $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot (4 + 1) + 1 \cdot (-2 - 1) \\ &= 1 - 10 - 3 = -12 \end{aligned}$$

$\det(A) = -12 \neq 0$, so the system is a Cramer system.

Compute the determinants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot (2 + 3) + 1 \cdot (-1 - 3) = 4 - 10 - 4 = -10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 + 3) - 4 \cdot (4 + 1) + 1 \cdot (6 - 1) = 5 - 20 + 5 = -10$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 + 1) - 2 \cdot (6 - 1) + 4 \cdot (-2 - 1) = 4 - 10 - 12 = -18$$

By Cramer's formulas :

$$x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\det(A)} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

The solution is $(x, y, z) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{2} \right)$.