Chapitre IV

Théorème de Gauss

CHAPITRE IV
THÉORÈME DE GAUSS

Introduction

Nous avons appris, à partir de la loi de Coulomb, à calculer le Champ électrostatique crée par une distribution de charges en un point de l'espace. Un tel calcul n'est pas toujours simple car il fait appel aux intégrales souvent ardues. Nous allons voir qu'il est possible de déterminer de façon plus simple le champ électrostatique à partir du théorème de Gauss « physicien allemand 1777-1855 », à conditions que ce champ possède des symétries spatiales. On peut montrer que le théorème de Gauss et la loi de Coulomb sont formellement identiques (on peut dériver l'un de l'autre). Mais le théorème de Gauss va nous apporter un point de vue beaucoup plus riche sur la nature du champ électrique que la seule loi de Coulomb. Il s'agit des notions de flux du vecteur champ électrique et d'angle solide.

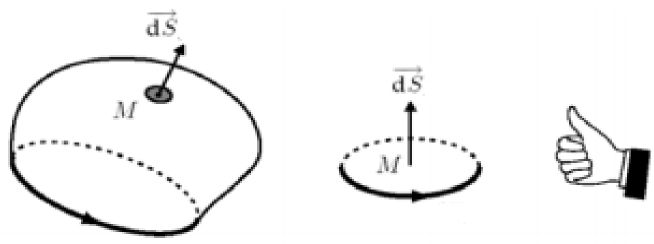
IV.1. Représentation d'une surface

Une surface *S* matérielle ou fictive est constituée d'un grand nombre de surfaces élémentaires *dS*, chacune d'elles entoure un point M de l'espace. Chaque élément de surface dS (FigIV.1) est représenté par un vecteur dS caractérisé par :

- Une norme dS.
- Orienté selon la normale au plan dS.
- Appliqué sur dS.
- De sens de l'intérieur vers l'extérieur de dS dans le cas d'une surface fermée.

Dans le cas d'une surface S qui s'appuie une un contour orienté, il faut utiliser la règle de la main droite ou règle de Stokes : si l'on place la main droite de telle manière que le sens positif va vers le bout des doigts, le pouce droit pointe dans le sens positif pour S.

FigIV.1



IV.2. Notion d'angle solide

L'angle solide est l'extension tridimensionnelle de l'angle défini dans un plan. Par analogie à l'angle dans le plan, on définit l'angle solide dΩ comme étant la mesure de la surface ds interceptée par le cône de sommet O dans la sphère de rayon r (voir la figIV.2). Cet angle délimité par le cône s'exprime par la quantité : $d\Omega = \frac{ds}{r^2}$.

Cet angle solide est toujours positif et se mesure dans le système SI en stéradian (sr).

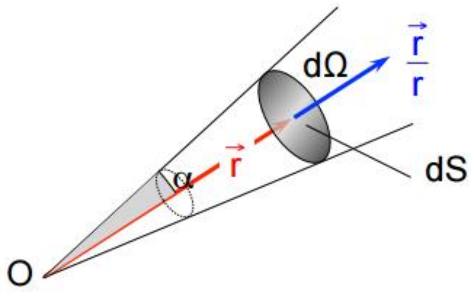


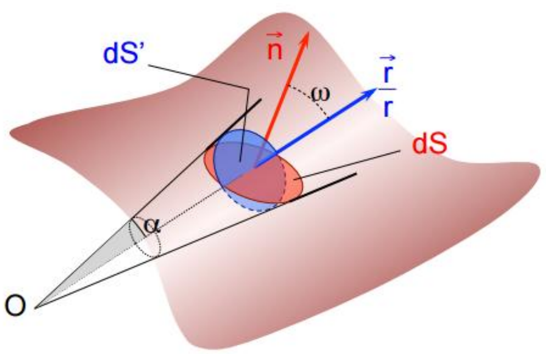
Fig IV.2

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $ds = r^2 sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \frac{ds}{r^2} = sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi, l'angle solide total Ω vaut :

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} sin\theta d\theta = 2\pi(1 - cos\alpha)$$

Avec φ varie de 0 à 2π et θ de 0 a α. Cas particulier, pour tout l'espace (sphere) θ varie entre 0 et π , d'où l'angle solide total est 4π sr

Pour une surface interceptée quelconque ds de vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par la normale de la surface ds(figure IV.3). On construit dS', élément de surface perpendiculaire à $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$. ω est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{n}$, alors l'angle solide vaut : $d\Omega = \frac{ds\prime}{r^2} = \frac{ds\,cos\omega}{r^2}$



FigIV.3

IV.3. Flux du champ électrostatique

On appelle flux élémentaire du vecteur champ électrique a travers la surface dS, la quantité scalaire positive ou négative définie par : $d\emptyset = \vec{E}d\vec{s}$. Le flux total à travers la surface S est :

$$\emptyset = \iint_s \vec{E}d\vec{S}.$$

IV.4. Théorème de Gauss

Considérons une charge ponctuelle q, placée au point O de l'espace. Le champ électrique crée par la charge q au point M distant de r est : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$.

Le flux total du vecteur champ électrique produit par q à travers la surface *dS est* comme suit :

$$\emptyset = \iint_s \boldsymbol{d\emptyset} = \iint_s \boldsymbol{\vec{E}d\vec{s}} = \iint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}\, d\vec{s} = \iint_s \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{d\Omega} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0}\iint_s \boldsymbol{d\Omega} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\Omega}$$

Le flux du vecteur champ électrique crée par la charge q à travers la surface s ne dépend que de l'angle solide sous lequel du point O on voit dS.

On envisage maintenant d'intégrer le flux élémentaire du champ électrique engendré par la charge ponctuelle q localisée au point O de l'espace sur une surface fermée S quelconque. Deux situations peuvent être distinguées.

VI.4.1. Charge située à l'intérieur de la surface S

Soit q_i la charge se trouvant à l'intérieur de la surface fermée S (figIV.4).Le flux à travers la surface s ne dépend que de l'angle solide.

L'angle solide sous lequel la charge intérieure q_i voit la surface S correspond à l'espace tout entier autour de O. Comme l'angle solide couvrant tout l'espace autour de q vaut 4π, le flux est donc :

$$\emptyset = \frac{\boldsymbol{q_i}}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{4\pi} = \frac{\boldsymbol{q_i}}{\varepsilon_0}.$$

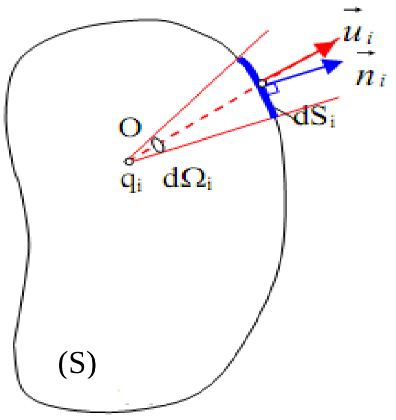


Fig IV.4

On conclut que le flux du champ électrostatique créé par une charge placée à l'intérieur de la surface fermée est égal à :

$$\emptyset = \oiint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble de charges :

$$\emptyset = \sum_i \emptyset_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

VI.4.2. Charge située à l'extérieur de la surface S

Supposons maintenant que la surface fermée S ne contienne pas de charge (fig.IV.5) (la charge q se trouve à l'extérieur de S). Traçons un cône élémentaire de sommet O où se trouve la charge extérieur q. Le cône issue de la charge q découpe la surface S et définit deux surfaces élémentaires dS_1 et dS_1' . Le flux total à travers la surface S est nul car le flux à travers dS_1 et égale et opposé au flux a travers dS_1'.

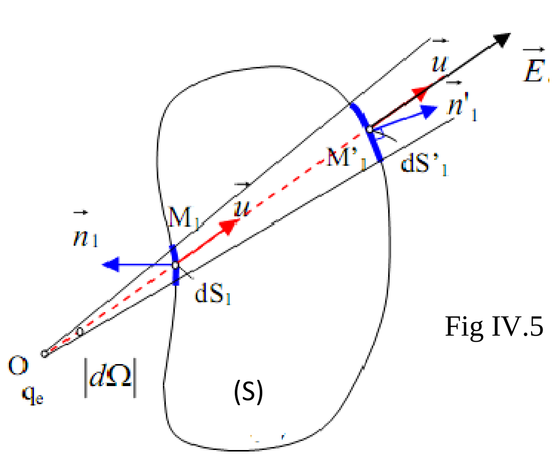


Fig IV.5

En effet sur dS_1, le produit scalaire $\vec{u}\, \overrightarrow{dS_1}$ est négatif et sur dS_1' le produit scalaire $\vec{u}\, \overrightarrow{dS_1'}$ est positif selon la direction des vecteurs surfaces dS_1 et dS_1', alors :

$$\emptyset = \iint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 {r_1}^2} \vec{u}\, \overrightarrow{dS_1} + \iint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 {r_1'}^2} \vec{u}\, \overrightarrow{dS_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\iint_s \frac{\vec{u}\, \overrightarrow{dS_1}}{{r_1}^2} + \iint_s \frac{\vec{u}\, \overrightarrow{dS_1'}}{{r_1'}^2} \right]$$

$$\Rightarrow \qquad \emptyset = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\iint_s -d\Omega + \iint_s d\Omega \right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} [\Omega - \Omega] = 0$$

Ainsi le flux total du champ électrostatique créé par des charges placées à l'extérieur de la surface fermée S est nul.

Résultat : énoncé du théorème de Gauss
Le flux du vecteur champ électrostatique à travers une surface fermée entourant des charges intérieures q_i est égal à la somme de ces charges divisé par la permittivité du vide ε0 :

$$\emptyset = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

Remarque :

Théorème de Gauss pour une distribution continue de charges
La charge totale intérieure et limitée par le volume V, la surface S et la longueur L respectivement et contenue dans la surface fermée de Gauss vaut :

$q_i = \iiint \rho dV$ Pour une distribution volumique de charges de densité ρ
$q_i = \iint \sigma dS$ Pour une distribution surfacique de charges de densité σ
$q_i = \int \lambda dl$ Pour une distribution linéique de charges de densité λ

Le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité de charges (linéique λ, surfacique σ et volumique ρ) s'écrit comme suit :

$\emptyset = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \lambda dl$ Cas d'une distribution linéaire.

$\emptyset = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint \sigma ds$ Cas d'une distribution surfacique.

$\emptyset = \oiint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dV$ Cas d'une distribution volumique.

VI.4.3. L'importance du théorème de Gauss

- Le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrique E et les sources de champ à savoir les charges électriques.
- Le théorème de Gauss permet de retrouver la loi de Coulomb : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale.
- Le théorème de Gauss permet de calculer d'une façon simple et rapide le champ électrique crée par des distributions de charges ayant un degré de symétrie très élevé.

VI.5. Application du théorème de Gauss

En vertu du principe de Curie, L'analyse de symétrie permet un choix judicieux de la surface de Gauss pour lequel le calcul du flux $\emptyset = \oiint_s \vec{E}d\vec{S}$ soit le plus simple possible.

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut suivre les étapes :

a)Déterminer et analyser la symétrie et l'invariance de la distribution des charges.
b) Choix de la surface de Gauss
c) Application du théorème de Gauss
Pour le choix de la surface de Gauss, il faut trouver une surface fermée passant par le point M où :

- Le champ est nul.
- Le champ est constant et parallèle à l'élément de surface $\vec{S}$.
- Le champ est perpendiculaire à l'élément de surface $d\vec{S}$.

Concernant les symétries, on distingue trois types de surfaces :

1- Symétrie sphérique : la surface de Gauss est une sphère concentrique.
2- Symétrie cylindrique : la surface de Gauss est un cylindre coaxial.
3- Symétrie plan : la surface de Gauss est une boite cylindrique de base perpendiculaire au plan.

Exemple d'application

Une sphère de centre O et rayon R est chargée en volume avec la densité de charge $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$ (ρ_0 est une constante).

1-Par l'application du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace.
2- Déduire l'expression du potentiel V(r) en tout point de l'espace.

Solution :

La sphère chargé présente une symétrie sphérique(r,θ,φ).

Analyse de symétrie :

La distribution de charges est invariante par toute rotation autour d'un axe passant par le centre O, alors le champ électrique est indépendant de θ et φ et il n'est fonction que de la distance r, du centre de la sphère.

En raison de symétrie, le champ est donc radial et on écrit :$\vec{E}(r,\theta,\varphi)=\vec{E}(r)$

Choix de la surface de Gauss :

En raison de la symétrie du champ électrostatique, on prend comme surface de Gauss une sphère concentrique S_G de centre O et rayon r.

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\emptyset=\oiint_S \vec{E}d\vec{s}=\oiint_S Eds=Es=E4\pi r^2=\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

- ❖ Champ a l'intérieur de la sphère S_G : $0<r<R$

La charge interne est :

$$q_i=\iiint_{S_G}\rho d\tau=\int_0^r \rho 4\pi r^2 dr=\int_0^r \rho_0\frac{r}{R}4\pi r^2 dr=\rho_0\frac{4\pi}{R}\int_0^r r^3\,dr=\rho_0\frac{4\pi}{R}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^r=\rho_0\frac{\pi}{R}r^4$$

Ainsi :

$$E=\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}$$

- ❖ Champ a l'extérieur de la sphère S_G : $r>R$

La charge interne est :

$$q_i=\iiint_{S_G}\rho d\tau=\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr=\int_0^R \rho_0\frac{r}{R}4\pi r^2 dr=\rho_0\frac{4\pi}{R}\int_0^R r^3\,dr=\rho_0\frac{4\pi}{R}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R$$
$$=\rho_0\frac{\pi}{R}R^4=\rho_0\pi R^3$$

D'où :

$$E=\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0\,r^2}$$

2/ Déduisons le potentiel V(r) :

de la relation locale, on a :$dV=-\vec{E}d\vec{r}=-Edr$

- ❖ Le potentiel a l'extérieur de S_G : $r>R$

$$V(r)=\int dV=\int -Edr=-\int\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0\,r^2}dr=\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0\,r}+C_1$$

C_1 est la constante d'intégration.

Comme $V(\infty)=0$, alors $C_1=0$

$$V(r) = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0\, r}$$

❖ Le potentiel a l'intérieur de la sphère S_G : $0 < r < R$

$$V(r) = \int dV = \int -Edr = -\int \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R} dr = \frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon_0 R} + C_2$$

C_2 est la constante d'intégration.

On calcul C_2de la condition de la continuité du potentiel pour $r = R$(à la traversé de la sphère chargée) ;

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \;\Rightarrow C_2 = \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}$$

D'où :

$$V(r) = \frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon_0 R} + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}$$