Algèbre 4,
2 $^{\text{ème}}$ année L M D

Professeur Fatima Boudaoud

2019-2020

Contents

Chapter 1

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définition 1. *On appelle forme bilinéaire sur $E \times E$ toute application*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$$

telle que

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, \grave{x}, y) \in E^3, \quad f(\alpha x + \grave{x}, y) = \alpha f(x, y) + f(\grave{x}, y)$ *(f est linéaire par rapport à la première place.)*
2. $\forall \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, \grave{y}, y) \in E^3, \quad f(x, \beta y + \grave{y}) = \beta f(x, y) + f(x, \grave{y})$ *(f est linéaire par rapport à la deuxième place.)*

Proposition 2. *Soient φ une forme bilinéaire sur $E \times E, (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \quad \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}, \quad x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p \quad \beta \in E$. On a alors :*

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \alpha_i \beta_j \quad \varphi(x_i, y_j).$$

Définition 3. *Une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite symétrique si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Proposition 4. *Pour qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ soit une forme bilinéaire symétrique , il faut et il suffit que :*
φ est symétrique.
φ est linéaire par rapport à la $2^{éme}$ place.

Définition 5. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. on appelle **forme quadratique** associée à φ l'application, ϕ de E vers $\mathbb{K}$ définie par :*

$$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x)$$

Proposition 6.

Définition 7. *Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ relativement à B, et on note $A = Mat_B(\varphi)$, la matrice carrée d'ordre n, symétrique, suivante :*

$$A = Mat_B(\varphi) = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}\,.$$

Proposition 8. *Soient φ une forme bilinéaire symètrique de $E \times E$ et B une base de E,*
A la matrice associé à φ dans la base B $\forall x, y \in E, X = Mat_B(x), Y = Mat_B(y)$ on a alors :

$$\varphi(x, y) = X^t AY.$$

Théorèm 9. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***
Soient (E, f) un espace vectoriel Euclidien, φ une forme quadratique associé á $\varphi, \forall (X, Y) \in E^2$; on a

$$(f(X, Y))^2 \leq \varphi(X)\varphi(Y).$$

1.1 Orthogonalité

Définition 10. *Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien.*

1. *Soit $(x, y) \in E^2$; on dit que x est **orthogonal** à y, et on note $x \perp y$, si et seulement si :$< x, y >= 0$.*

2. *Soient $x \in E, A \in P(E)$; on dit que x est **orthogonal** à A, et on note $x \perp A$, si et seulement si : $\forall a \in A, < x, a >= 0$.*

3. *Pour toute partie A de E, on définit **orthogonal** de A, notée $A \perp$:*

$$A \perp = \{x \in E : \forall a \in A, < x, a >= 0\}\,.$$

Définition 11. *Une forme bilinéaire symètrique f sur $E \times E$ est dite dégénérée (resp non dégénérée) si et seulement si $Ker f \neq \{0\}$ (resp $Ker f = \{0\}$).*

Définition 12.
1. *Un vecteur x de E est dit **isotrope** pour la forme quadratique φ si et seulement si $\varphi(x) = 0$.*

2. *On appelle **cône isotrope** de φ l'ensemble des vecteurs isotropes pour φ.*

3. *Un sous espace vectoriel F de E est dit **totalement isotrope** si et seulement si : $F \subset F^{\perp}$.*

Proposition 13. *E étant un espace vectoriel de dimension finie, pour toute forme f bilinéaire symètrique sur E et tout sous espace vectoriel F de E les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La restriction de f à F est non dégénrée.*

2. *$F \cap F^{\perp} = \{0\}$.*

3. *F n'est pas isotrope.*

4. *$E = F \oplus F^{\perp}$.*

1.2 Endomorphisme adjoint

Définition 14. *Soit E un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristiques $\neq 0$, $\quad f$ une forme bilinéaire symètrique non dégénérée sur E et φ la forme quadratique associée à f et u un endomorphisme de E*

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E^* < u(x), y^* >=< x, u^t(y^*) > .$$

Chapter 2

Formes Sesquilinéaires

Définition 15. *On appelle forme sesquilinéaire sur $E \times E$ toute application*

$$f : E \times E \to \mathbb{C}$$

telle que

1. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall (x, \grave{x}, y) \in E^3, \quad f(\alpha x + \grave{x}, y) = \bar{\alpha} f(x, y) + f(\grave{x}, y)$ *(f est semi-linéaire par rapport à la première place.)*

2. $\forall \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall (x, \grave{y}, y) \in E^3, \quad f(x, \beta y + \grave{y}) = \beta f(x, y) + f(x, \grave{y})$ *(f est linéaire par rapport à la deuxième place.) Autrment dit f est sesquilinéaire si et seuleument si*

3. $f_x = f(x, .)$ *est une forme* ***semi-linéaire par rapport à la première place****) sur F.*

4. $f_y(., y)$ *est* ***linéaire par rapport à la deuxiéme place****) sur E.*

Proposition 16. *Soient f une forme sesquilinéaire sur $E \times E, (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_p \in E$. On a alors :*

$$f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j) = \sum_{1 \leq k \leq n}^{1 \leq j \leq p} \bar{\alpha_k} \beta_j (x_k, y_j)$$

Définition 17. *Une forme sesquilinéaire f est dite symétrie Hermitienne si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(y, x) = f(\bar{x}, y)$$

Proposition 18. *Pour q'une application $f : E \times E \times \to \mathbb{C}$ soit une fsh, il faut et il suffitque l'on ait:*

- $\forall (x, y) in E \times E, \quad f(x, y) = f(\bar{x}, y)$, *$f$ es une symétrie hermitienne.*
- $\forall \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall (x, \grave{y}, y) \in E^3, \quad f(x, \beta y + \grave{y}) = \beta f(x, y) + f(x, \grave{y})$ *(f est linéaire par rapport à la deuxième place.)*

Définition 19. *Soit f une fsh sur $E \times E$. on appelle forme hermitienne associée à f l'application, souvent notée ϕ, de E dans $\mathbb{C}$, définie par:*

$$\forall x \in E, \phi(x) = f(x, x)$$

Example 20.

- *Le produit scalaire hermitien canonique sur* $\mathbb{C}^n$, *défini par*

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \to \sum_{k=1}^n \bar{x_k} y_k \end{array}$$

est une forme sesquilinéaire hemitienne , et la forme hermitienne associée est :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) \to \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \end{array}$$

- *l'application* f

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \to \bar{x_1} y_2 + \bar{x_2} y_1 \end{array}$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne et la forme hermitienne associée est ϕ

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \\ ((x_1, x_2)) \to \bar{x_1} x_2 + \bar{x_2} x_1 \end{array}$$

Proposition 21. *Soient* f *une fsh sur* $E \times E$. *La forme hermitienne* ϕ *assoiciée à* f, *on a :*

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall x_1, \ldots, x_n \in E.$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \phi(x_k) + 2 \sum_{1 \leq j \leq n} Re\left(\bar{\alpha_k} \alpha_j \phi(x_k, x_j)\right)$$

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \forall (x, y) \in E^2,$

$$\phi(\alpha x, \beta y) = |\alpha|^2 \phi(x) + 2Re\left(\bar{\alpha} \beta f(x, y)\right) + |\beta|^2 \phi(y)$$

- $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) = \phi(x) + 2Re\left(f(x, y)\right) + \phi(y)$
- $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = \frac{1}{4}\left(\phi(x + y) - i\phi(x + iy) - \phi(x - y) + I\phi(x - iy)\right)$
- $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2\left(\phi(x) + \phi(y)\right).$

Définition 22.

- *Soit* $(x, y) \in E^2$; *on dit que* x *est orthogonal à* y *pour* f *si et seulement si :*

$$f(x, y) = 0$$

- *Soient* $x \in E, a$ *une partie de* E, *on dit que* x *est orthogonal à* A *pour* f, *et si seulement si :* $\forall a \in A, f(x, a) = 0$
- *Pour toute partie* A *de* E, *on définit l'orthogonal de* A *pour* f, *noté* $A^\perp$ *:*

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, f(x, a) = 0\}.$$

Définition 23. *On appelle noyau de* f, *et on note* $Ker(f)$, *le sev* $E^\perp$ *de* E.

Example 24. *:Soit f est une forme sesquilinéaire hermitienne*

$$f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) :\to \bar{x_1} y_1$$
$$Ker(f) = \{x \in E; \forall y \in E, x_1 = 0\} = C(0, 1)$$

Définition 25. *Une fsh f sur $E \times E$ est dite dégénérée (resp non dégénérée) si et seulement si $Ker(f) \neq \{0\}$ (resp $Ker(f) = \{0\}$)*

Définition 26. *Une fh ϕ sur E est dite définie si et seulement si :*

$$\forall x \in E, (\phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Définition 27. *On dit que la fh ϕ sur E est dite positive si et seulement si :*

$$\forall x \in E, \phi(x) \in \mathbb{R}^+$$

Proposition 28.
- *Si ϕ est définie, alors ϕ est non dégénérée .*
- *Si Phi est non dégénérée et positve, alors ϕ est définie.*

Si E et F sont de dimension finie, rapportés respectivement aux bases $((a_i), 1 \leq i \leq m)$ et $((b_i), 1 \leq j \leq n)$ en posant

$$x = \sum_{i=1}^{m} x^i a_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y^i b_i, \quad f(a_i, b_j) = \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$$

Nous obtiendrons

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x^i \bar{y^i}$$

La matrice $A = (\alpha_{ij})$, matrice complexe à m colonnes et n lignes est dite associée à la forme sesquilinéaire$f$; nous aurons:

$$f(x, y) = \bar{Y}^t A X = X^t A \bar{Y}$$

2.1 Formes hermitiennes

Définition 29. *Supposons que $E = F$, on dit que f une forme sesquilinéaire f définie sur $E \times E$ est hermitienne si et seulement si:*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

Cette relation est quelquefois appelée "symétrie hermitienne"

Définition 30. *On appellera **forme quadratique hermitienne** associée à la forme hermitienne f l'application q de E dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in E \quad q(x) = f(x, x).$$

On a

$$\forall x, y \in E \quad f(x, y) = \frac{q(x + y) - q(x - y)}{4} + i \frac{q(x + iy) - q(x - iy)}{4}$$

Théorèm 31. *f étant une forme hermitienne sur E, espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ et α_{ij} la matrice associée à f dans une base de E, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *f est non dégénérée sur E.*
2. *$f(x,y) = 0$ pour tout $x \in E \Rightarrow y = 0$.*
3. *$f(x,y) = 0$ pour tout $y \in E \Rightarrow x = 0$.*
4. *L'application φ de E dans E^* définie par $\varphi(x) = f_y = f(.,y)$ est bijective.*
5. *$det(\alpha_{ij}) \neq 0$.*