Faculté des sciences exactes et appliquées, département de mathématiques
Cours et exercices sur les courbes, L. M. D., L 2. 03/2020.

Chapitre II

Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Une courbe est définie comme une trajectoire parcourue par un point matériel dans un plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut observer une courbe suivant différents concepts. Celle-ci ne peut-être matériellement concrétisée que dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. A partir de la dimension $n > 4$, une courbe est définie comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et c'est du formalisme. On peut concevoir une courbe comme être mathématique dans tout ensemble muni d'une topologie respectant certaines propriétés.

I. Représentations régulières, paramétrisations

Soit l'intervalle $I = [a, b]$ ou $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ et l'application

$$\begin{aligned} X : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ t &\longrightarrow X(t) = (x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)). \end{aligned}$$

X est dite *différentiable* de classe $c^p, p \geq 1$ si et seulement si les $x_i(t), 1 \leq i \leq n$ sont de classe $c^p, p \geq 1$. Si $p = \infty$, X est différentiable.

Définition 1

On appelle *courbe paramétrée* de $\mathbb{R}^n$ l'application différentiable

$$X : t \in I \longrightarrow X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

L'image de I par X, s'appelle *courbe géométrique* qu'on notera $(\mathcal{C})$. On dit que X définit une *paramétrisation* ou *représentation* de la courbe $(\mathcal{C})$.

• La courbe est dite *régulière* si X est une *immersion*, i.e.

$$\begin{cases} i) \ X(t) \in c^1 \\ ii) \ X'(t) \neq 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i'(t))^2 \neq 0, \forall t \in I \end{cases}.$$

X vérifiant ces conditions est dite *représentation paramétrique régulière* de la courbe $\mathcal{C}$.

Commentaires sur la définition 1

1°) *i)* $X \in c^1$ signifie que chacune des composantes $x_i(t), 1 \leq i \leq n$ l'est, *ii)* signifie qu'au moins l'une des coordonnées $x_i'(t), 1 \leq i \leq n$ du vecteur vitesse est non nulle.

2°) Un point ou plusieurs $X(t_i), t_i \in I$ de $\mathcal{C}$ tel que $X'(t_i) = 0$, est appelé *point singulier.*

X est aussi appelé fonction vectorielle car si $\{e_i\}, 1 \leq i \leq n$, est la base de $\mathbb{R}^n$, $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ sont les composantes du vecteur dit *vecteur position* exprimé dans $\{e_i\}, 1 \leq i \leq n$ par $X = x_i e_i$.

Définition 2

Soit $X(t_0)$ un point de $\mathcal{C}$ tel que $X'(t_0) \neq 0$. La tangente au point $X(t_0)$ à $\mathcal{C}$ est la *droite affine* passant par $X(t_0)$ et de direction $X'(t_0)$. Le vecteur $X'(t_0)$ est appelé le *vecteur vitesse* où vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en $X(t_0)$.

Commentaires sur la définition 2

1°) Pour $X(t)$ régulière, la vitesse $X'(t)$ joue un rôle important en physique et en mathématique.

2°) Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on utilise souvent $(x(t), y(t))\,;(x(t), y(t), z(t))$. L'utilisation des indices est pour le formalisme de généralisation dans des espaces à n dimensions, $n \geq 3$.

3°) Si on choisit une base euclidienne dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, la fonction vectorielle $X(t)$ est équivalente aux couples ou triplet de fonctions réelles $(x(t), y(t))\,;(x(t), y(t), z(t))$ comme coordonnées de $X(t)$ en tant que point où *vecteur position* dans la base euclidienne $\{e_1, e_2\}$) de $\mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exemples

1°) Dans $\mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $X(t) = (2t+1, 2t^2+3), t \in \mathbb{R}$ admet pour graphe la parabole $y = \frac{x^2}{4} - x + \frac{7}{2}$. $X(t)$ est régulière car $X'(t) = (2, 4t)$ où $x'(t) = 2, y'(t) = 4t$, sont continues et

$$X'^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) = 4 + 16t^2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2°) Dans $\mathbb{R}^2$, la fonction vectorielle $X(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ admet pour courbe géométrique dite "*cubique*" $y^2 = x^3$ définit une représentation paramétrique. Dans cet exemple la courbe présente un point singulier $(t_0 = 0)$ en $(0,0)$ puisque $X'(t) = (2t, 3t^2)$ où $X'(0) = (0,0)$. Ce point est appelé point de *rebroussement* de première éspèce, ou *cusp*.

3°) Dans $\mathbb{R}^2$, les fonctions $X_1(t) = (\exp t, t^2)$, $X_1(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ sont des courbes régulières $\forall t \in \mathbb{R}$.

4°) La courbe $X(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ telle que $r = 2\cos\theta - 1$ est une représentation régulière. Comme

$$X(\theta) = (x_1(\theta) = \cos\theta\,(2\cos\theta - 1)\,, x_2(\theta) = \sin\theta\,(2\cos\theta - 1))$$

on doit donc montrer que $|X'(\theta)| \neq 0$.

Remarque: *Une représentation paramétrique régulière* peut avoir sur I des points dits multiples, i. e. : pour $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in I$ on a $X(t_1) = X(t_2)$. Cependant, localement ce n'est pas le cas. En ce sens nous avons la

Définition 3

Une fonction réelle α définie sur un intervalle I est un changement de paramétrisation *admissible* de la courbe géométrique $\mathcal{C}$ si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ est telle que

$$\begin{cases} i)\ \alpha \in c^{\infty}, \forall t \in I \\ ii)\ \alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I. \end{cases}$$

Commentaires sur la définition 3

1°) Il est clair que si $\alpha = \alpha(t)$ est un changement de paramètre *admissible* sur un intervalle I alors $\alpha = \alpha(t)$ est une application biunivoque de I sur

$J = \alpha(I)$. La fonction inverse $t = t(\alpha)$ est un changement de paramètre, lui aussi, *admissible* sur J.

2°) Un courbe dans $\mathbb{R}^n$, peut avoir autant de représentations qu'on souhaite pourvu que le changement d'un paramètre à l'autre soit *admissible.*

3°) Deux paramétrisations d'une courbe $\mathcal{C}$ définissent la même *orientation:* dite positive si elle a le même sens de parcours de $\mathcal{C}$ et si on passe de l'une à l'autre par un changement de variable admissible telle que $\alpha'(t) > 0$ (négative si $\alpha'(t) < 0$).

4°) D'après 2°) on peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des représentations régulières.

2 - Courbes régulières

Définition 2.1

Une fonction réelle $t = t(\tau)$ sur un intervalle $I_\tau \subseteq \mathbb{R}$ est un changement de paramètre *admissible* si

$$\begin{cases} i)\ t = t(\tau) \in c^1, \forall \tau \in I_\tau \\ ii)\ t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau} \neq 0, \forall \tau \in I_\tau. \end{cases}$$

Théorème 2.1

Si $t = t(\tau)$ est un changement de paramètre admissible sur un intervalle I_τ alors $t = t(\tau)$ est une application biunivoque de I_τ sur $I_t = t(I_\tau)$. L'inverse $\tau = \tau(t)$ est un changement admissible sur I_t.

Proposition 2.1

Une représentation paramètrique régulière $X = X(t), t \in I_t$ est équivalente à une autre $X = X^*(\tau)$, $\tau \in I_\theta$, s'il existe un changement de paramètre *admissible* $t = t(\tau)$ sur I_τ telle que

$$\begin{cases} i) t(I_\tau) = I_t \\ ii) X(t(\tau)) = X^*(\tau) \end{cases}.$$

Preuve: Il est bien clair que $X = X(t)$ est équivalente à elle même sous l'identité $t = \tau$. Si $X = X(t)$ est équivalente à $X = X^*(\tau)$ sous le changement de paramètre $t = t(\tau)$, alors $X = X^*(\tau)$ est équivalente à $X = X(t)$ sous le changement $\tau = \tau(t)$, puisque $\tau(I_t) = I_\tau$, et $X^*(\tau(t)) = X(t(\tau(t))) = X(t)$. Supposons maintenant que $X(t)$ est équivalente à $X^*(\tau)$ sous le changement $t = t(\tau)$, et $X^*(\tau)$ est équivalente à $X^{**}(\sigma)$ sous le changement $\tau = \tau(\sigma)$. La dérivée $\frac{dt}{d\sigma} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}$ est continue et $\frac{dt}{d\sigma} \neq 0$ sur I_σ. Par conséquent $t(\tau(\sigma))$ est un changement de paramètre admissible sur I_σ et nous avons aussi $t(\tau(I_\sigma)) = t(I_\tau) = I_t$ et $X(t(\tau(\sigma))) = X^*(\tau(\sigma)) = X^{**}(\sigma)$. Ainsi $X(t)$ et $X^{**}(\sigma)$ sont équivalentes.

Remarques 2.1

1°) Une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être déterminée comme intersection de deux surfaces, comme ensemble de points qui satisfassent le système des deux fonctions:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si en tout point (x,y,z), il est vérifié $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\neq 0$ alors d'après le théorème des fonctions implicites qu'au voisinage de la composante z pris comme paramètre, nous pouvons résoudre le système précédent pour x et y comme étant des fonctions de z de la forme $x(z), y(z)$ et $z(z)=z$. Ceci définit localement au moins une courbe régulière. On reprendra cette façon de voir aussi quand on abordera la notion de surface dont l'équation implicite est justement de la forme $F(x,y,z)=0$.

2°) Une courbe peut-être aussi localement représentée sous forme *de graphe*, dans $\mathbb{R}^2$, c'est

$$\mathcal{C}=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in J=[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}\}.$$

Exemples: Exprimer $X_1(t)=\left(\cos^2 t,\sin^2 t\right)$, et $X_2(t)=\left(\exp t,t^2\right)$ paramétrée sous forme de graphe. Cela revient à exprimer la courbe dans le système en coordonnées cartésiennes. et on a respectivement

$$\mathcal{C}_1=\{(x,y)\mid y=1-x, x\in\mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{C}_2=\left\{(x,y)\mid y=(\ln x)^2, x\in\mathbb{R}^{+^*}\right\}.$$

3. Arc régulier, paramétrage naturel d'une courbe

On note souvent $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique par espace euclidien $\mathbb{E}^3$. La longueur d'un arc est définie en termes de longueurs des segments du pôlygone approximatif p qui joint les extémités de cet arc. Soit un arc, pas nécessairement régulier, c'est à dire un morceau d'une courbe $\mathcal{C}: X(t), a\leq t\leq b$.

Si on considère la subdivision

$$\mathfrak{S}=\{a=t_0,t_1,.....,t_n=b\mid a=t_0<t_1<t_2<t_3<...........<t_n=b\}.$$

Elle détermine une suite de points

$$X(t_0)=X_0, X(t_1)=X_1, X(t_2)=X_2, ...X(t_n)=X(b)=X_n$$

dans $\mathbb{E}^3$, qui joints, forment un arc pôlygonal approximatif p_1. La longueur d'un segment de deux points adjacents X_{i-1}, X_i est $|X_i-X_{i-1}|$. La longueur de p_1 est

$$l(p_1)=\sum_{i=1}^n|X_i-X_{i-1}|=\sum_{i=1}^n|X(t_i)-X(t_{i-1})|.$$

Plus $\mathfrak{S}$ est fine, la subdivision est plus grande, on obtient une autre ligne pôlygonale p_2 qui admet des segments plus petits que ceux de p_1 et on a $l(p_1)\leq l(p_2)$. En continue le processus rendant de plus en plus fine la subdivision $\mathfrak{S}$, la somme des longueurs des segments atteindra son maximum qui sera la longueur de l'arc $X=X(t), a\leq t\leq b$.

Définition 3.1

On dit qu'un arc régulier $X=X(t), a\leq t\leq b$ est *rectifiable* si l'ensemble $\mathfrak{S}$ de chaque expression $l(p)$ est bornée. L'ensemble $\mathfrak{S}=\{l(p)\}$ admet un maximum qui est définie comme étant la *longueur* de l'arc.

Exemple

L'arc dans $\mathbb{R}^2: X(t)=(t,t^2), 0\leq t\leq 1$ *est rectifiable.*

Soit la base canonique (e_1,e_2) de $\mathbb{R}^2$. Si on considère la subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < .... < t_n = 1,$$

la longueur de l'arc pôlygonal approximatif est

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} \left|(t_i e_1 + t_i^2 e_2) - (t_{i-1} e_1 + t_{i-1}^2 e_2))\right| \leq$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left[|t_i - t_{i-1}| \, |e_1| + \left|t_i^2 - t_{i-1}^2\right| |e_2|\right]$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(1 + t_i + t_{i-1}) \leq 3 \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = 3,$$

puisque

$$0 \leq t_{i-1} < t_i \leq 1, 1 + t_{i-1} + t_i \leq 3.$$

Pour tout p, la quantité $l(p)$ est bornée par 3. L'arc est rectifiable et sa longueur $l = \max l(p)$.

Théorème 3.1

Un arc régulier dans $\mathbb{R}^3$ $X = X(t), a \leq t \leq b$, est rectifiable. Sa longueur est

$$s = \int_a^b \left|\frac{dX}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Certains passages dans la démonstration sont a admettre.

Soit une courbe paramétrée $X : I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe c^1,régulière, de longueur l qu'on peut paramétriser par l. L'application

$$s(t) = \int_a^l \left|\frac{dX}{d\tau}\right| d\tau = \int_a^l \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

définit une bijection croissante entre $[a, b]$ et $[0, l]$ dont la dérivée $|X'(t)| > 0$. On peut inverser cette fonction $s(t)$ et obtenir une fonction $t = g(s)$ dérivable telle que $g'(s) = \frac{1}{s'(t)}$.

Si on pose $\tilde{X} = X \circ g : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ alors

$$\tilde{X}' = g'(s) X'\left(g(s)\right) = \frac{X'}{s'(t)} = \frac{X'(t)}{|X'(t)|}, \left|\tilde{X}'\right| = 1.$$

Il est clair que $\tilde{X}'(s)$ est unitaire, qu'on appelle désormais *vecteur vitesse*. Cela veut dire que la courbe est parcourue avec une vitesse constante égale à un.

Définition 3.2

On dit que la courbe $X : [0; l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est paramétrée par sa longueur si $\left|\frac{dX}{ds}\right| = |X'(s)| = 1$. Dans ce cas la longueur de l'arc paramétrisée par $[0, s]$ est égale à s

Commentaires sur la définition 3.2

1°) Si $t \geq t_0$, alors $s \geq 0$ et est égal à la longueur du segment de l'arc de la courbe comprise entre $X(t_0)$ et $X(t)$. Si $t < t_0$,alors $s < 0$ et est égal à la longueur de l'arc compris entre $X(t_0)$ et $X(t)$. Une simple dérivation sous le signe d'intégration et moyennant la régularité des fonctions à dériver nous aurons

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \left|\frac{dX}{dt}\right| dt\right) = \left|\frac{dX}{dt}\right|.$$

Ainsi $s = s(t)$ est un changement de variable admissible sur I et y est de classe $c^m, m \geq 1$ si $X(t)$ l'est. La longueur de l'arc peut être introduite, le long de la courbe, comme *paramètre.*

2°) La représentation en termes de longueur de l'arc n'est pas unique, elle dépend du choix du point initial t_0 (où $s = 0$) et de l'orientation. Pour des raisons pratiques, nous prenons, (sauf indication contraire)

$$s(t) = -\int_{t_0}^{t} \left|\frac{dX}{d\tau}\right| d\tau = \int_{t}^{t_0} \left|\frac{dX}{d\tau}\right| d\tau.$$

On définit une représentation $X = X(t)$ sur I_s comme étant une représentation en terme de longueur de l'arc qu'on appelle *représentation naturelle* si

$$|X'(s)| = \left|\frac{dX}{ds}\right| = 1.$$

Cette propriété d'avoir le vecteur vitesse de norme unité caractérise *le paramètre naturel* "s".

3°) Cette paramétrisation par la longueuer de l'arc est évidemment admissible et très utilisée dans l'étude des courbes.

La dérivation par rapport au paramètre naturel s est habituellement notée par des *points* sur la fonction dont elle dépend. Celle, par rapport à une autre variable t est notée par des *primes*

$$\dot{X}(s) = \frac{dX}{ds},\ \ddot{X}(s) = \frac{d^2X}{ds^2}, ...;\ X'(t) = \frac{dX}{dt},\ X''(t) = \frac{d^2X}{dt^2}, ...$$

Tout en sachant le lien qui existe entre le paramètre naturel et un paramètre quelconque

$$X'(t) = \frac{dX}{dt} = \frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{X}(s)}{|X'(t|}.$$

Ces différentes notations ont été adopté par les classiques, ceux qui ont posé les premiers jalons de la mécanique classique.

II. Courbure, torsion de courbes dans $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$

Tout objet mathématique possède un certain nombre de caractéristiques, qui le distingue des autres. Cela constituerait, en quelque sorte et sans exagérer, une espèce d'A.D.N. pour chaque objet mathématique. En langage approprié, on appelle cette ou ces caractéristique(s) l'(les) invariant(s) algébrique(s), qui sont d'ailleurs toujours en nombre fini. Elle(s) permet(tent) d'identifier *unilatéralement* cet objet. C'est important de mentionner que cet (ces) invariant(s) sont à transformation particulière, (pas n'importe laquelle aussi, c'est nécessairement une isométrie) près. Par exemple, un segment de droite est caractérisé par sa longueur et comme il y a une infinité de segments qui ont la même longueur, on peut toujours les ramener par des translations et des rotations et les confondre avec un seul modèle. Un cercle est identifié par son rayon. Un triangle, par la somme de ses angles, *etc...*

Pour une courbe, il y a *deux invariants algébriques* qu'on définira. Il est plus aisé de parler de ces notions en dimension deux et trois. En dimension $n > 3$, ces notions seront formellement définies sans difficultés.

On supposera ici les courbes paramétrées *birégulières*, i. e. $X^{'}(.)$ et $X''(.)$ sont linéairement indépendants.

Une courbe est *entièrement et uniquement* détérminée par deux scalaires dites *courbure* et *torsion.*

Définition 1

1°) Si la courbe $\mathcal{C} : X(s)$ est régulière et paramétrée par sa longueur, le *vecteur tangent unitaire* est

$$\mathbf{t}(s) = \dot{X}(s) = \tfrac{dX}{ds}; \left|\dot{X}(s)\right| = \left|\tfrac{dX}{ds}\right| = 1 \qquad (2.1)$$

2°) Le *vecteur courbure* est $\mathbf{k}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{X}(s)$. *Le vecteur normal unitaire*, appelé *vecteur normal principal*

$$\mathbf{n}(s) = \tfrac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\left\|\dot{\mathbf{t}}(s)\right\|},$$

et le scalaire $\kappa\,(s)$ qu'on appelle *la courbure de* $\mathcal{C}$. C'est l'abcisse de $\mathbf{n}(s)$ en direction de $\mathbf{k}(s)$

$$\kappa\,(s) = \left\|\dot{\mathbf{t}}(s)\right\|, \mathbf{k}(s) = \kappa\,(s)\,\mathbf{n}(s). \qquad (2.2)$$

3°) La paire $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ est complétée par un troisième vecteur unitaire appelé *binormale* définie par

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s).$$

4°) En tout point $X(s)$ le triplet $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ est une base orthonormée appelée base ou *trièdre* de Seret-Frenet. Le quadruplet $(X(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ est appelé le *repère de* Seret-Frenet.

Commentaire sur la définition 1

1°) En toute dimension comme dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on a $\dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa\,(s)\,\mathbf{n}(s)$ mais la courbure est par définition positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que $\dot{\mathbf{t}}(s)$. Comme on a un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et une droite orthogonale à celui-ci, il n'y a aucun moyen de choisir raisonnablement entre les deux vecteurs unitaires de cette droite. C'est la notion d'orientation. Elle sera reprise avec la notion de variété dans les chapitres qui suivent.

2°) La courbure est une notion intrinsèque et concerne directement la courbe. La notion de torsion non nulle apparait nécessairement à partir de la dimension trois. Ce problème a été traité par L. P. Heisenhart vers les années 1909 dans *Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ed. Ginn and Co.

D'après la définition 1. 3°) le vecteur dérivé de $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ est

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \dot{\mathbf{n}}(s).$$

Il est orthogonal à $\mathbf{b}(s)$ et à $\mathbf{t}(s)$, colinéaire à $\mathbf{n}(s)$, il existe donc un scalaire τ tel que $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Le signe $(-)$ est pour des raisons de commodité. En multipliant scalairement les deux membres de l'égalité précédente par $\mathbf{n}(s)$ on a $\tau(s) = -\left\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \right\rangle$ et on la

Définition 2

On appelle *torsion* de la courbe $\mathcal{C} : X(s)$ la fonction scalaire

$$\tau(s) = -\left\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s) \right\rangle .$$

Remarque 2

La définition impose deux conditions

i) La courbe $(\mathcal{C})$ doit être trois fois dérivable

ii) $(\mathcal{C})$ doit être birégulière au point où il y a torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire ni le vecteur normal unitaire car $\dot{\mathbf{t}}(s) = 0$). On observera aussi que la condition de birégularité impose que la courbure ne s'annule pas au point où il y a torsion. Au fait, birégularité équivaut à régularité et positivité.

2. Equations, système de Seret-Frenet d'une courbe dans R^3

Le long d'une courbe $\mathcal{C} : X(s)$, en tout point il est établit le repère mobile de Seret-Frenet

$$(X(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) .$$

Les dérivés des vecteurs $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ sachant $\dot{\mathbf{n}}(s) = -\tau\,(s)\,(\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s)) + \mathbf{b}(s) \wedge (\kappa\,(s)\,\mathbf{n}(s))$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{t}}(s) = \kappa\,(s)\,\mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) = -\kappa\,(s)\,\mathbf{t}(s) + \tau\,(s)\,\mathbf{b}(s). \\ \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau\,(s)\,\mathbf{n}(s) \end{array} \right. . \qquad (2.3)$$

Ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\,(s) & 0 \\ -\kappa\,(s) & 0 & \tau\,(s) \\ 0 & -\tau\,(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} .$$

Il traduit l'expression de chacun des vecteurs dérivés $\dot{\mathbf{t}}(s), \dot{\mathbf{n}}(s), \dot{\mathbf{b}}(s)$ dans la base locale $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Il est appelé système (équations) de Seret-Frenet.

Exemple fondamental

Dans $\mathbb{R}^3$, la courbe représentée pour un paramètre quelconque $t \in \mathbb{R}$ est

$$\mathcal{C} : X(t) = (x\,(t) = a \cos t, y(t) = a \sin t, z(t) = bt)\,; a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, t \in \mathbb{R}$$

admet des propriétés géométriques remarquables. Elle s'appelle *l'hélice droite.* Géométriquement c'est la courbe qui s'enroule sur la surface d'un cylindre droit dans $\mathbb{R}^3$ d'axe principal (Oz) et de rayon "a".

On a bien $(x^2(t) + y^2(t) = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2)$. Au bout d'un tour autour de l'axe (Oz), la coordonnée z augmente de $2b\pi$. Ce bond de z est appelé le *pas* de l'hélice, en mécanique physique on l'appelle aussi le *pas de vis.*

α) On évalue la courbure et la torsion de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur vitesse est $X'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ dont la norme est $\|X'(t)\|^2 = a^2 + b^2$. Le paramètre naturel

$$s(t) = \int_0^t \left|\frac{dX}{d\tau}\right| d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}du = t\sqrt{a^2+b^2}.$$

La courbe dans sa paramétrisation naturelle est

$$X(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, s \in \mathbb{R}$$

de vecteur tangent

$$\dot{X}(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, s \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs du repère mobile sont

$$\mathbf{t}(s) = \dot{X}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\right)$$

de vecteur vitesse

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{X}(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

dont la norme est la courbure

$$\left\|\dot{\mathbf{t}}(s)\right\| = \left\|\ddot{X}(s)\right\| = \kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Le vecteur normal principal et la binormale sont

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\left\|\dot{\mathbf{t}}(s)\right\|} = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right), \mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\right).$$

La dérivée de la binormale est

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

dont en déduit la torsion

$$\tau(s) = -\left\langle \mathbf{n}(s), \dot{\mathbf{b}}(s)\right\rangle = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Notons que cette courbe est la seule qui admet les invariants caractéristiques $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ constants.

β) L'hélice a des propriétés géométriques remarquables.

i) Son vecteur tangent, en tout point régulier, fait un angle constant avec l'axe (Oz) dans $\mathbb{R}^3$.

ii) Elle est à l'origine d'une classification des courbes dans $\mathbb{R}^3$ qui ont la propriété d'avoir le rapport des invariants caractéristiques $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ constant; voir quelques exemples en exercices 7 et 8.

Pour i) Soient les vecteurs $\mathbf{t}(s)$ et e_3 le vecteur unitaire porté par (Oz). Le produit scalaire $\langle \mathbf{t}(s), e_3 \rangle$ est

$$\left\{ \begin{array}{c} \langle \mathbf{t}(s), e_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b \right), (0,0,1) \right\rangle = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \langle \mathbf{t}(s), e_3 \rangle = |\mathbf{t}(s)|\,|e_3| \cos \measuredangle (\mathbf{t}(s), e_3) = \cos \measuredangle (\mathbf{t}(s), e_3) . \end{array} \right.$$

Soit donc

$$\measuredangle (\mathbf{t}(s), e_3) = \cos^{-1} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) .$$

Dans le cas particulier $a = b = 1$, on a $\kappa(s) = \tau(s) = \frac{1}{2}, \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = 1, \measuredangle (\mathbf{t}(s), e_3) = \frac{\pi}{4}$.

3. Existence d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^2$.

Naturellement, le long d'une courbe régulière $X(s)$, d'après (2.3) il est établi un système d'équations dépendant de deux fonctions qui gère le déplacement d'un point sur cette courbe. Réciproquement, comme $\dot{X}(s) = \mathbf{t}(s)$, il est naturel de se demander si, étant données deux fonctions continues arbitraires $\kappa = \kappa(.)$ et $\tau = \tau(.)$, peut-on déterminer?, à une isométrie près, une courbe intégrale

$$X(s) = \int \mathbf{t}(s) ds + c, c \in \mathbb{R}$$

admettant comme courbure et torsion les fonctions κ et τ?

La réponse est donnée par le théorème fondamental de Cauchy d'existence et d'unicité de la solution d'un système ou équations différentielles.

Le repère de Seret-Frenet est construit à partir du vecteur tangent à la courbe. $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ apparaissent naturellement.

Théorème 3.1

Soient deux fonctions arbitraires continues $\kappa(s)$ et $\tau(s), s \in I \subseteq R$ est le paramètre naturel. Alors il existe, à isométrie près, une et une seule courbe $(\mathcal{C}) : X(s)$ dans $\mathbb{R}^3$ de courbure $\kappa(s)$ et de torsion $\tau(s)$.

a) La preuve de ce théorème est dans de nombreux manuels de géométrie différentielle sur les courbes et surfaces, voir bibliographie. Nous donnons quelques conséquences pour des courbes remarquables et exercices.

b) L'assertion "*à isométrie près*" apparait souvent dans ce genre de théorème d'existence car *le groupe d'isométries de* $\mathbb{R}^3$ est le groupe des transformations qui préservent le produit scalaire. Pour $\mathbb{R}^3$, ce groupe est de dimension six et est constitué de translations et de rotations. On précisera cette notion au Chapitre 6.

c) Manifestement, le théorème 2.3.1 montre l'existence d'une courbe. Dans le cas où la courbe est de torsion nulle $\tau \equiv 0$, c'est à dire pour les courbes planes, on peut toujours intégrer le système de Seret-Frenet. Il se réduit à une équation différentielle de Ricatti dont l'intégration donne la courbe, voir Heisenhart [?].

Soit $\varphi = \measuredangle(e_1, \mathbf{t})$ l'angle des vecteurs tangent $\mathbf{t}$ et e_1 porté par l'axe des abscisses (Ox) de $\mathbb{R}^2$ de base (e_1, e_2). On a

$$\mathbf{t} = (\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2, \mathbf{n} = (-\sin\varphi(s))\, e_1 + (\cos\varphi(s))\, e_2.$$

En dérivant ces vecteurs, par rapport au paramètre naturel, on a

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \dot{\varphi}\left[(-\sin\varphi(s))\, e_1 + (\cos\varphi(s))\right] e_2 = \dot{\varphi}\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\varphi}\left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi)\,(s)\right] e_2 = -\dot{\varphi}\mathbf{t} \end{cases}.$$

Comme dans $\mathbb{R}^2$, $\tau = 0$, (2.3) se réduit à

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n},\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t}.$$

En comparant avec les équations précédentes on a

$$\tfrac{d\varphi}{ds} = \dot{\varphi} = \kappa. \qquad (2.4)$$

En intégrant on a

$$\varphi(s) = \int \kappa(s) ds + \varphi_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$$

En portant $\mathbf{t} = (\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2$ dans l'expression $X(s) = \int \mathbf{t}(s)ds + c, c \in \mathbb{R}$ alors

$$X(s) = \int \left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2\right] ds + c, c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.1 la constante d'intégration φ_0 dans $\varphi(s)$ représente une translation d'angle par rapport à l'angle φ ce qui, géométriquement, se traduit par une rotation d'angle φ_0 de la courbe $X(s)$ autour de l'origine de $\mathbb{R}^2$. La constante d'intégration c dans $X(s)$ est une translation de la courbe dans le plan.

Si $\forall s, \kappa \neq 0$ i.e. $\dot{\varphi} \neq 0, \forall s$ on peut introduire la fonction $\theta(s)$ comme paramètre dans l'expression

$$X(s) = \int \left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2\right] ds + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

qu'on peut écrire

$$X(s) = \int \left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2\right] \tfrac{ds}{d\varphi} d\varphi + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

ou explicitement

$$X(s) = \int \tfrac{1}{\frac{d\varphi}{ds}} \tfrac{ds}{d\varphi} \left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2\right] d\varphi + c_2 =$$
$$\int \tfrac{1}{\kappa(\varphi(s))} \left[(\cos\varphi(s))\, e_1 + (\sin\varphi(s))\, e_2\right] d\varphi + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La courbe est entièrement déterminée.

4. Courbure et torsion de courbes dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^2$

Proposition 4.1

Une courbe $\mathcal{C}$ birégulière de classe c^3 est plane si et seulement si sa torsion $\tau \equiv 0$.

Preuve: Comme $(\mathcal{C}) : X(s)$ est birégulière et c^3, le repère de Seret-Frenet est bien défini. La dérivée est $\dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau \mathbf{n}(s) = 0$ qui donne $\mathbf{b}$ constant $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ est orthogonal à $\mathbf{t}$ et à $\mathbf{n}$ alors $(\mathcal{C}) : X(s)$ reste dans un même plan orthogonal à $\mathbf{b}$.

Réciproquement, si $X(s)$ est plane, birégulière, alors $\langle X(s), \mathbf{b}\rangle = c, c \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \neq 0$. Comme $\left\langle \dot{X}(s), \mathbf{b} \right\rangle = \left\langle \ddot{X}(s), \mathbf{b} \right\rangle = 0$, ce qui signifie $\dot{\mathbf{b}}(s) = 0$, i. e. $\tau \equiv 0$.

Quant au calcul analytique explicite de la courbure et de la torsion de courbes régulières dans $\mathbb{R}^3$. Cela consiste en le théorème suivant qui est démontré dans l'exercice 5.

Théorème 4.1

Une courbe régulière $\mathcal{C} : X(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, admet comme courbure et torsion

$$|\kappa| = \frac{|X' \wedge X''|}{|X'|^3}, \tau = \frac{[X', X'', X''']}{[X' \wedge X'']^2}; \left[\dot{X}, \ddot{X}, \dddot{X}\right] = \kappa^2 \tau.$$

Remarque 4.1

1°) Le théorème 2.4.1 s'applique aussi pour les courbes planes de $\mathbb{R}^2$ représentée par $X(t) = (x(t), y(t), 0), t \in I \subseteq \mathbb{R}$

La troisième coordonnée $z(t) = 0$. Si $\mathcal{C} : X(t) = (x(t), y(t), 0), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ est cette courbe, alors

$$X'(t) = (x'(t), y'(t), 0), X''(t) = (x''(t), y''(t), 0).$$

La courbure est

$$|\kappa| = \frac{|X' \wedge X''|}{|X'|^3} = \frac{|(x'(t), y'(t), 0) \wedge (x''(t), y''(t), 0)|}{|(x'(t), y'(t), 0)|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

2°) Si la courbe est représentée comme graphe $y = f(x)$,on écrit

$$X(t) = (x(t) = t, y(t) = f(t), z(t) = 0)$$

la courbure est

$$|\kappa| = \frac{|X' \wedge X''|}{|X'|^3} = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

On peut utiliser (2.4) pour retrouver la courbure d'une courbe plane représentée graphiquement par $y = f(x)$ où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dx} \Longleftrightarrow \varphi' = \dot{\varphi}\frac{ds}{dx}.$$

Comme indication, on utilise la métrique euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$. voir exercice.