Faculté des sciences exactes et appliquées, département de mathématiques
Corrigé des exercices sur les courbes, L. M. D., L 2. 03/2019.

Ex.1.1°) Montrer que $(O', \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ est un repère cartésien du plan:
Dans le repère cartésien donné $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, les points ont pour coordonnées:

$$A(1,0); B(0,1), O'(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), A'(2,0); B'(0,2).$$

Si $M(x,y)$ est un point quelconque du plan, d'après la relation de Chasles, les vecteurs sont définis par:

$$\overrightarrow{O'M} = (x - \tfrac{1}{2}, y - \tfrac{1}{2}), \overrightarrow{O'A'} = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}), \overrightarrow{O'B'} = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}).$$

2°) L'équation vectorielle $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{O'A'} + y'\overrightarrow{O'B'}$ se traduit en coordonnées, dans $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ par l'équation

$$\begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} y'.$$

Les solutions (x', y') de cette équation sont celles du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' = x - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}y' = y - \frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Comme il est de Cramer $(\det(a_{ij}) = 2)$, il admet une solution unique (x', y') pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ce qui prouve que $(O', \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ est un repère cartésien et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Ex.2. Notons, moyennant le produit vectoriel et certaines propriétés des déterminants, que l'aire algébrique $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC est

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$
$$|\mathcal{A}| = \tfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|.$$

L'aire algébrique $\mathcal{A}_1$ du triangle $A_1B_1C_1$ est

$$\mathcal{A}_1 = \det(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \det(\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC_1}) =$$
$$\det(\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}, 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA})$$
$$= \det(\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}, 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \det(\overrightarrow{CB}, -\overrightarrow{CA}) + 6\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$
$$= -\det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + 6\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + 6\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$
$$= 7\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 7\mathcal{A}.$$

Ex.3.1°) Voir la définition d'un sous groupe. Il s'agit de celui du groupe matriciel $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$.

2°) L'expression $D(x_1,x_2;y_1,y_2;z_1,z_2)$ vaut

$$D(x_1,x_2;y_1,y_2;z_1,z_2)=x_1y_2-x_2y_1-x_1z_2+x_2z_1+y_1z_2-y_2z_1.$$

L'expression $D(x_1',x_2';y_1',y_2';z_1',z_2')$ vaut

$$\begin{gathered}D(x_1',x_2';y_1',y_2';z_1',z_2')=\\ =x_1y_2a_{11}a_{22}-x_1y_2a_{12}a_{21}-x_2y_1a_{11}a_{22}+x_2y_1a_{12}a_{21}-x_1z_2a_{11}a_{22}+x_1z_2a_{12}a_{21}\\ +x_2z_1a_{11}a_{22}-x_2z_1a_{12}a_{21}+y_1z_2a_{11}a_{22}-y_1z_2a_{12}a_{21}-y_2z_1a_{11}a_{22}+y_2z_1a_{12}a_{21}\\ =(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\left(x_1y_2-x_2y_1-x_1z_2+x_2z_1+y_1z_2-y_2z_1\right).\end{gathered}$$

Soit donc

$$D(x_1',x_2';y_1',y_2';z_1',z_2')=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,D(x_1,x_2;y_1,y_2;z_1,z_2).$$

Comme $\det A=1$, alors

$$D(x_1',x_2';y_1',y_2';z_1',z_2')=D(x_1,x_2;y_1,y_2;z_1,z_2).$$

Les transformations unimodulaires laissent invariant D.

En termes matriciels on a

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2 & a_{21}x_1+a_{22}x_2 & 1\\ a_{11}y_1+a_{12}y_2 & a_{21}y_1+a_{22}y_2 & 1\\ a_{11}z_1+a_{12}z_2 & a_{21}z_1+a_{22}z_2 & 1\end{pmatrix}=$$
$$\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ y_1 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & 0\\ a_{12} & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ex.4.1°) F est un $\mathbb{R}$ sous espace vectoriel de dimension deux car il représente un plan passant par l'origine. Il admet comme base, exemple $u_1=(1,-1,0)\,,u_2=(1,0,-1)$. Ainsi $F=Vect\,(u_1,u_2)$. Cette base $\{u_1,u_2\}$ est quelconque qu'on peut rendre orthonormale (Gram-Schmidt), on a

$$v_1=\tfrac{u_1}{\|u_1\|}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1,-1,0)\,,v_2=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1\right).$$

On a bien $\langle v_i,v_j\rangle=\delta_i^j,1\leq i,j\leq 2,(v_1,v_2)$ est une base orthonormale.

2°) Comme $\dim F=2$, on en déduit directement que $\dim F^\perp=\dim\mathbb{R}^3-\dim F=1$. $F^\perp$ est décrit par le vecteur normal $u=(1,1,1)$ qui est directeur du plan $F=\left\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid\langle x,u\rangle=0)\right\}$. Ainsi $F^\perp=Vect(u)$. Le vecteur u peut être normalisé comme

$$v_3=\tfrac{u}{\|u\|}=\tfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1),F^\perp=Vect(v_3).$$

Ex.5.1°) Dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$ on a $X=x_ie_i,Y=y_ie_i,i=1,2,3$. Algébriquement le produit vectoriel entre deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ est

$$X \wedge Y = (x_2y_3 - y_2x_3)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3.$$

Formellement

$$X \wedge Y = \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} e_1 - \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} e_3.$$

Au fait, si on pose $\measuredangle(X, Y) = \alpha$

$$\begin{aligned} |X \wedge Y|^2 = \langle X \wedge Y, X \wedge Y\rangle &= |X|^2 |Y|^2 \sin^2\alpha = |X|^2 |Y|^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right) \\ &= |X|^2 |Y|^2 - |X|^2 |Y|^2 \cos^2\alpha = |X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2 . \end{aligned}$$

On peut aussi faire le calcul analytiquement.

2°) $X \perp (X \wedge Y)$, $Y \perp (X \wedge Y)$. Le calcul de $\langle X, X \wedge Y)\rangle$ et $\langle Y, X \wedge Y)\rangle$ donne aisément 0.

3°) *a*) Le développement de

$$\langle X, Y \wedge Z\rangle = (y_2z_3 - y_2z_3)x_1 + (z_1y_3 - z_3y_1)x_2 + (y_1z_2 - y_2z_1)x_3.$$

Comme $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_i^j$,

$$\det(X, Y, Z) = [X, Y, Z] = (y_2z_3 - y_3z_2)x_1 + (z_1y_3 - z_3y_1)x_2 + (y_1z_2 - z_1y_2)x_3.$$

b) Le produit scalaire et le produit mixte sont respectivement

$$\begin{aligned} \langle X \wedge Y, Z\rangle &= (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \\ \det(X, Y, Z) &= (x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2z_1y_3 + y_1x_3z_2 - x_3y_2z_1). \end{aligned}$$

On obtient aisement

$$\langle X \wedge Y, Z\rangle = \langle X, Y \wedge Z\rangle = \det(X, Y, Z)$$

c)

$$[X, Y, X \wedge Y] = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_2y_3 - y_2x_3 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= x_1^2y_2^2 - 2x_1y_1x_3y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + y_1^2x_3^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_2y_3 - y_2x_3)^2 = |X \wedge Y|^2 . \end{aligned}$$

Géométriquement, c'est le volume du parallélipipède de cotés $|X|, |Y|, |X \wedge Y|$.

4°) D'après 3° *a*)

$$\begin{aligned} \langle X, Y \wedge Z\rangle &= [X, Y, Z] = \det(X, Y, Z), \\ \langle A, B \wedge C\rangle) &= [A, B, C] = \det(A, B, C). \end{aligned}$$

On a

$$[X,Y,Z]\,[A,B,C]=\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}=$$
$$\det\begin{pmatrix} \langle X,A\rangle & \langle X,B\rangle & \langle X,C\rangle\\ \langle Y,A\rangle & \langle Y,B\rangle & \langle Y,C\rangle\\ \langle Z,A\rangle & \langle Z,B\rangle & \langle Z,C\rangle\end{pmatrix}.$$

Notons que $\forall M,N\in\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$

$$\det M\det N=\det(MN)\,,\det M=\det\left({}^tM\right).$$

Ex.6.1°) Rappelons que le vecteur directeur d'une droite qui est "l'intersection" des plans a pour coordonnées les mineurs de la matrice d'éléments les coordonnées des vecteurs directeurs des plans. Cette matrice est

$$M_{P_1\cap P_2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Ses mineurs sont les composantes du vecteur directeur de Δ_0, qui est $V_{\Delta_0}=(5,-5,-5)$.

L'intersection $\Delta_0\cap P_0$ est la solution (si elle existe) du système linéaire

$$\begin{cases} x+2y-z-6=0\\ 2x-y+3z+13=0\\ 3x-2y+3z+16=0\end{cases}$$

Il est de Cramer car

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}=10\neq 0.$$

La solution est $(-1,2,-3)$. Ainsi $\Delta_0\cap P_0=\{I(-1,2,-3)\}$

2°) Comme précédemment, les mineurs de la matrice

$$M_{P_3\cap P_4}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

sont les coordonnées du vecteur directeur de Δ_1, soit $V_{\Delta_1}=(15,-9,3)$ et celui de Δ_2 est $V_{\Delta_2}=(1,-2,-11)$. Le produit scalaire entre eux est $\langle V_{\Delta_1},V_{\Delta_2}\rangle=0$, Δ_1 perpendiculaire à Δ_2.

3°) $i)$ Déterminons un repère de D on a

$$\begin{cases} x+y+z+1=0\\ 2x+y+5z=2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x+y=-z-1\\ 2x+y=-5z+2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x=-4z+3=0\\ y=3z-4.\end{cases}$$

Un repère de D est (A, u) où $A = (3, -4, 0)$ et $u = (-4, 3, 1)$.
De même un repère de D'

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=-z-2 \\ 2x+y=5z+3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=6z+1=0 \\ y=-7z+1 \end{array}\right. .$$

Un repère de D' est (A', u') où $A' = (1, 1, 0)$ et $u' = (6, -7, 1)$.

On a $u \wedge u' = (10, 10, 10) \neq 0$ c'-à-d. que $u, \vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, D et D' ne sont pas parallèles et par conséquent, elles ont une perpendiculaire commune qu'il faut décrire. En effet, la distance entre D et D' est

$$d(D, D') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AA'} u\, \mathrm{u}'\right]\right|}{|u \wedge u'|} = \sqrt{3}.$$

La perpendiculaire commune contenant le point $M(x, y, z)$ est donnée par le système

$$\left\{\begin{array}{c} \left[\overrightarrow{AM}, u, u \wedge u'\right] = 0 \\ \left[\overrightarrow{A'M}, u', u \wedge u'\right] = 0. \end{array}\right.$$

soit donc le système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+5y-7z+14=0 \\ 8x+5y-13z-13=0. \end{array}\right.$$

$ii)$ Déterminons un repère pour Δ: on a

$$\Delta : \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z=-x+1 \\ 2y+z=x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ z=-3x+2. \end{array}\right.$$

Posons p la projection orthogonale sur le plan P. Un repère de Δ est (A, u) où $A = (0, -1, 2)$ et $u = (1, 2, -3)$. Le plan P admet $\vec{n} = (1, 2, -3)$ comme vecteur directeur. u et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc $p(\Delta)$ est une droite du plan P. Plus exactement, $p(\Delta) = P \cap P'$ où P' est le plan qui contient Δ et est perpendiculaire à P. On peut prendre comme repère pour P' le triplet $(A, u, \vec{n})$. Ainsi

$$M(x, y, z) \in P' \Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, u, \vec{n}\right) = 0 \Longleftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

Cette équation est celle du plan P'. La projetée orthogonale de Δ sur le plan P est la droite

$$\tilde{\Delta} : \left\{\begin{array}{c} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6 \end{array}\right. .$$

Ex.7. A, B, C, D coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ le sont, i. e. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Pour le calcul de la distance, soit on explicite l'équation du plan $P : ax + by + cz + d = 0$, ce qui est facile car on résoud un système linéaire en a, b, c, d à quatre équations et appliquer la définition de la distance d'un point à un plan. On trouve $P : 3x + 5y - z - 14 = 0$ et comme $M(1, 2, 3)$ alors

$$d(M,P) = \frac{|3\times1+2\times5-1\times3-14|}{\sqrt{3^2+5^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{35}}.$$

On peut utiliser une autre méthode qui consiste à chercher un vecteur normal à P, qui n'est autre que son vecteur directeur. Choisir, par exemple $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (3,5,-1)$. Soit $M(1,2,3)$ et son projeté H orthogonal sur P. On a donc $d(M,P) = MH$. Puisque $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, alors $\left\langle \overrightarrow{MH}, \vec{n} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{MH} \right\| \|\vec{n}\|$. Comme $\overrightarrow{HA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ alors

$$\left\langle \overrightarrow{MH}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \right\rangle.$$

Traduit, en coordonnées on a

$$\left\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \right\rangle = \langle (0,0,-4), (3,5,-1) \rangle = 4; \|\vec{n}\|^2 = \|(3,5,-1)\|^2 = 35.$$

D'où

$$d(M,P) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{MA}, \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{4}{\sqrt{35}}.$$

Ex.8. $1^{ère}$ *méthode*:

Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ affine. La distance entre M et les plans P_1 et P_2 est

$$d(M,P_1) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}}, d(M,P_2) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}}.$$

Les distances entre tout point $M\,(x,y)$ du plan bissecteur (B_1,B_2) et (P_1,P_2) sont égales, on a

$$\begin{gathered} d(M,P_1) = d(M,P_2) \\ \Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Longleftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2 \\ \Longleftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \\ \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2y+2z+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array} \right. . \end{gathered}$$

Les plans bissecteurs de P_1 et P_2 admettent pour équation cartésienne

$$B_1 : x-2y+2z+2=0; B_2 : 2x-z+1=0.$$

Les vecteurs directeurs $\vec{n}_{B_1}, \vec{n}_{B_2}$ de B_1 et B_2 sont orthogonaux, voir $\langle \vec{n}_{B_1}, \vec{n}_{B_2} \rangle = \langle (1,-2,2), (2,0,-1) \rangle = 0$.

$2^{ème}$ *méthode*:

Les plans P_1 et P_2 ont $\vec{n}_1 = (4,4,-7), \vec{n}_2 = (8,-4,1)$ comme vecteurs directeurs. Notons que

$$\|\vec{n}_1\| = \|\vec{n}_2\| \Longleftrightarrow \sqrt{4^2+4^2+7^2} = \sqrt{8^2+4^2+1^2} = 9.$$

Le faisceau $\tilde{P}_\alpha$ de plans engendré par P_1 et P_2 est $\tilde{P}_\alpha : P_1 + \alpha P_2 = 0$, soit

$$\tilde{P}_\alpha : (4+8\alpha)\, x + 4\,(1-\alpha)\, y + (\alpha - 7)\, z + 7\alpha - 1 = 0.$$

$\tilde{P}_\alpha$ admet comme vecteur directeur $\vec{n}_\alpha = (4+8\alpha, 4-4\alpha, \alpha-7)$. Le premier plan bissecteur de P_1, P_2 est déterminé par l'équation (voir l'égalité des angles)

$$\begin{gathered} \langle \vec{n}_1, \vec{n}_\alpha \rangle = \langle \vec{n}_2, \vec{n}_\alpha \rangle \\ \langle (4,4,-7)\,, (4+8\alpha, 4-4\alpha, \alpha-7) \rangle = \langle (8,-4,1)\,, (4+8\alpha, 4-4\alpha, \alpha-7) \rangle \\ \alpha = 1. \end{gathered}$$

Le premier plan bissecteur correspond à $\alpha = 1$ dans $\tilde{P}_\alpha$, $\tilde{P}_1 : 2x - z + 1 = 0$. C'est B_2 de la $1^{ère}$ *méthode*.

Pour le deuxième plan bissecteur, il est orthogonal à $\tilde{P}_1$ de vecteur directeur $\vec{n}_{\tilde{P}_1} = (2,0,-1)$. Il est déterminé par

$$\begin{gathered} \left\langle \vec{n}_{\tilde{P}_1}, \vec{n}_\alpha \right\rangle = 0 \\ \langle (2,0,-1)\,, (4+8\alpha, 4-4\alpha, \alpha-7) \rangle = 0 \Longleftrightarrow 2\,(4+8\alpha) - (\alpha - 7) = 0 \\ \alpha = -1. \end{gathered}$$

Ce plan correspond à $\alpha = -1$ dans $\tilde{P}_\alpha$. C'est $\tilde{P}_{-1} : x - 2y + 2z + 2 = 0$ $\tilde{P}_{-1} = B_1$ de la $1^{ère}$ *méthode*.

Remarque: Normalement, le faisceau de plans engendré par P_1 et P_2 est $P_{\lambda,\mu}$: $\lambda P_1 + \mu P_2 = 0; \lambda, \mu \in R$. On peut toujours ramener $P_{\lambda,\mu}$, en choisissant un des paramètres non nul à la forme $\tilde{P}_\alpha : P_1 + \frac{\mu}{\lambda} P_2 = 0$, on a choisit $\lambda \neq 0$. Au fait, on a simplement

$$B_2 = \tilde{P}_1 \colon P_1 + P_2 = 0, B_1 = \tilde{P}_{-1} : P_1 - P_2 = 0.$$

Ex.9. $1^{ère}$ *méthode* : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; l'ensemble $E : 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$ de $\mathbb{R}^2$ qui est une conique et qui peut être décomposer en produit de deux droites. On peut utiliser la méthode de Gauss,

$$\begin{gathered} 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 2x^2 + x\,(5y-3) + 3y^2 - 2y - 5 \\ = 2\left(x + \tfrac{1}{4}\,(5y-3)\right)^2 - \tfrac{1}{8}\,(5y-3)^2 + 3y^2 - 2y - 5 \\ = \tfrac{1}{8}\,(4x+5y-3)^2 - \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{14}{8}y - \tfrac{49}{8} = \tfrac{1}{8}\left[(4x+5y-3)^2 - (y-7)^2\right] \\ = \tfrac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5) \end{gathered}$$

Par suite,

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'ensemble $E : 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0, 2x + 3y - 5 = 0$. E est la réunion des droites $D_1 : x + y + 1 = 0$ et $D_2 : 2x + 3y - 5 = 0$.

$2^{ème}$ *méthode* : (Directe et facile), on peut considérer l'ensemble $E : 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$ comme une équation du second degré d'une variable x ou y, peu importe, puisque les variables ont le même rôle. On peut donc considérer une variable comme fonction graphe $y = f(x)$ (même chose si on considére $x = g(y)$). Ainsi l'équation du second degré en y est $3y^2 + (5x-2)\, y + \left(2x^2 - 3x - 5\right) = 0$ dont le discriminant est

$$\delta = (5x-2)^2 - 12\left(2x^2 - 3x - 5\right) = (x+8)^2 .$$

D'où les racines y_1 et y_2 qui correspondent aux droites

$$D_1 : x + y + 1 = 0 \text{ et } D_2 : 2x + 3y - 5 = 0.$$

ii) (Tracer une figure) La parallèle à D_1 passant par O est la droite D_1' d'équation $x+y=0$ et la parallèle à D_2 passant par O est la droite D_2' d'équation $2x+3y=0$.

Ces droites se coupent en les quatre points $O(0,0), A(-5,5), B(-8,7), C(-3,2)$. L'aire du parallélogramme vaut

$$\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right| = 5.$$