# Corrigée fiche de TD N 2 Algèbre 4, 2 $^{\text{ème}}$ année L M D

April 4, 2020

**Solution 1.** *1. $f$ est une forme bilinéaire :*
$\forall X, \acute{X}, Y \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *on montre que :*

$$f(\alpha_1 X + \alpha_2 \acute{X}, Y) = \alpha_1 f(X,Y) + \alpha_2 f(\acute{X}, Y)?$$

*(a)* $$f(\alpha_1 X + \alpha_2 \acute{X}, Y) \begin{cases} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \acute{x_1})y_1 - (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 \acute{x_2})y_1 + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 \acute{x_2})y_2 \\ +(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \acute{x_1})y_3 + 2(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 \acute{x_3})y_3 \\ = (\alpha_1 x_1 y_1 - \alpha_1 x_2 y_1 + \alpha_1 x_2 y_2 + \alpha_1 x_1 y_3 + 2\alpha_1 x_3 y_3) \\ + (\alpha_2 \acute{x_1} y_1 - \alpha_2 \acute{x_2} y_1 + \alpha_2 \acute{x_2} y_2 + \alpha_2 \acute{x_1} y_3 + 2\alpha_2 \acute{x_3} y_3) \\ = \alpha_1 f(X,Y) + \alpha_2 f(\acute{X}, Y) \end{cases}$$

*Donc $f$ est linéaire par rapport à la première place*

*(b)* $\forall X, Y, \acute{Y} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *on montre que :*

$$f(X, \alpha_1 Y + \alpha_2 \acute{Y}) = \alpha_1 f(X,Y) + \alpha_2 f(X, \acute{Y})?$$

*De la même manière, on montre que $f$ est linéaire par rapport à la deuxième place*

2. *Pour écrire $f$ sous la forme matricielle, on calcule $f(e_i, e_j)$ avec $e_i$ $i = 1, \ldots, 3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{cases} f(e_1,e_1) = 1 & f(e_1,e_2) = -1 & f(e_1,e_3) = 0 \\ f(e_2,e_1) = 0 & f(e_2,e_2) = 1 & f(e_2,e_3) = 0 \\ f(e_3,e_1) = 1 & f(e_3,e_2) = 0 & f(e_3,e_3) = 2 \end{cases}$$

*La matrice associée à $f$ :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *La matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base $B = (u_1, u_2, u_3)$ est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Donc l'expression de $f$ dans la nouvelle base est : $B = P^t A P$*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Donc*

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

**Exercice 1.** *Soit $f$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$, et soit $\varphi$ la forme quadratique associée, montrer que :*

1. $\forall x,y\in E \quad \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2(\varphi(x)+\varphi(y))$.
2. $\forall x,y\in E \quad \varphi(x+y)-\varphi(x-y)=4f(x,y)$.

**Solution 2.** 1. $\forall x,y\in E \quad \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2(\varphi(x)+\varphi(y))$.

*On a*

$$f:E\times E\to\mathbb{R}$$

*0n utilise le fait que $f$ est une forme bilinéaire symétrique :*

$$\begin{cases}\varphi(x+y)=\varphi(x)+2f(x,y)+\varphi(y)\\ \varphi(x-y)=\varphi(x)+2f(x,-y)+\varphi(y)\\ \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)+2f(x,y)+\varphi(y)+\varphi(x)+2f(x,-y)+\varphi(y)\\ \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)+2f(x,y-y)+2\varphi(y)\\ \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)+2\varphi(y).\end{cases}$$

2. $\forall x,y\in E \quad \varphi(x+y)-\varphi(x-y)=4f(x,y)$.

$$\begin{cases}\varphi(x+y)=\varphi(x)+2f(x,y)+\varphi(y)\\ \varphi(x-y)=\varphi(x)+2f(x,-y)+\varphi(y)\\ \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)+2f(x,y)+\varphi(y)-\varphi(x)-2f(x,-y)-\varphi(y)\\ \varphi(x+y)-\varphi(x-y)=4f(x,y)\end{cases}$$

**Exercice 2.** *Calculer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ dans les cas suivants*

- $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2, \quad F=\{k(1,0)/k\in\mathbb{R}\}$.
- $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1, \quad F=\{k(1,0)/k\in\mathbb{R}\}$.
- $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1, \quad F=\{k(0,1)/k\in\mathbb{R}\}$.
- $E=\mathbb{C}^2, f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2, \quad F=\{k(1,i)/k\in\mathbb{C}\}$.

**Solution 3.** 1. $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2, \quad F=\{k(1,0)/k\in\mathbb{R}\}$.

$$F^\perp=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(X,Y)=0,\forall Y\in F\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2,\forall(y_1,y_2)=(\lambda,0)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1\lambda=0,\right\}, \quad =\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$$

$$F^\perp=\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.$$

$$(F^\perp)^\perp=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(x,Z)=0,\forall Z\in F^\perp\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(x,Z)=x_1z_1+x_2z_2,\forall(z_1,z_2)=(0,z_2)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_2z_2=0,\right\}=\{(x_1,0)/x_1\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$$

*Remarque : $f$ étant non dégénérée($ker f=0$) donc $F=(F^\perp)^\perp$*

2. $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1, \quad F=\{k(1,0)/k\in\mathbb{R}\}$.

$$F^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(X,Y)=0,\forall Y\in F\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)=x_1y_1,\forall(y_1,y_2)=(k,0)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1k=0,\right\}=\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$$

$$F^{\perp}=\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(X,Z)=0,\forall Y\in F^{\perp}\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(X,Z)=x_1z_1,\forall(z_1,z_2)=(0,k)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/0=0,\right\}=\{(x_1,x_2)/x_1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2.\end{cases}$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=\{(x_1,x_2)/x_1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2.$$

3. $E=\mathbb{R}^2, f(x,y)=x_1y_1, \quad F=\{k(0,1)/k\in\mathbb{R}\}$.

$$F^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(X,Y)=0,\forall Y\in F\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(x,y)=x_1y_1,\forall(y_1,y_2)=(0,k)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1y_1=0,\right\}=\{(x_1,x_2)/x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2.\end{cases}$$

$$F^{\perp}=\{(x_1,x_2)/x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2.$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{R}^2/f(X,Z)=0,\forall Y\in F^{\perp}\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/f(x,Z)=x_1z_1,\forall(z_1,z_2)=(k_1,k_2)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2/x_1k_1=0,\right\}=\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=\{(0,x_2)/x_2\in\mathbb{R}\}.$$

4. $E=\mathbb{C}^2, f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2=0, \quad F=\{k(1,i)/k\in\mathbb{C}\}$.

$$F^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{C}^2/f(X,Y)=0,\forall Y\in F\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2/f(x,y)=x_1\lambda+ix_2\lambda=0,\forall(y_1,y_2)=(\lambda,i\lambda)\forall\lambda\in\mathbb{C}\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2/x_1+ix_2=0,\right\}=\{(x_1,-ix_1)/x_1\in\mathbb{C}\}.\end{cases}$$

$$F^{\perp}=\{x_1(1,i)/x_1\in\mathbb{C}\}.$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=\begin{cases}\left\{X\in\mathbb{C}^2/f(X,Z)=0,\forall Z\in F^{\perp}\right\}\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2/f(X,Z)=x_1z_1+x_2z_2=0,\forall(z_1,z_2)=k(1,i)\right\}.\\ \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2/x_1k+ikx_2=0,\right\}=\{k(i,1)/x_2\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$$

$$(F^{\perp})^{\perp}=F$$