Les intégrales

Solutions fiche de TD

PARTIE 1

Mme. L.Mébarki

Remerciements

Je remercie mesdemoiselles Amel Boudellal et Merieme Slimani, les deux enseignantes de la section E, de nous avoir préparé cette fiche de TD.

Note pour les étudiants

Le calcul intégral constitue pour les étudiants de ST un outil essentiel à l’usage des autres chapitres et des autres matières. Pour le métriser il faut faire beaucoup d’exercices, donc il faut commencer à s’entrainer!

.

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes:*

$$\int x^2 dx, \int e^{-2x} dx, \int \frac{1}{x} dx, \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \int \cos(4x+3)\, dx.$$

- <u>On utilise tout simplement l'intégration directe c'est-à-dire:</u> $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)}$

- $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$ $\quad \left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1 \right)$
- $\int e^{-2x} dx = \int \frac{1}{-2}\left(-2e^{-2x}\right) dx = \frac{1}{-2} \int \left(e^{-2x}\right)' dx$ $\quad \left(\int e^x dx = e^x + C \right)$
  $= -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)'\, dx = \ln|x| + C.$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x}\right)' dx = \sqrt{x} + C$
- $\int \cos(4x+3)\, dx = \int \frac{(\sin(4x+3))'}{4} dx = \frac{1}{4} \int (\sin(4x+3))'\, dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + C$

Exercice 2. *Calculer les intégrales suivantes par un changement de variable*

$$I_1=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx,\ I_2=\int \frac{1}{x\ln x}dx,\ I_3=\int \frac{1}{\sin x}dx,\ I_4=\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx,\ I_5=\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx,$$
$$I_6=\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^4 x}dx,\ I_7=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx,\ I_8=\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}dx,\ I_9=\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx.$$

Formule de changement de variable: $\boxed{\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du}$

- $I_1=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ Intégrale trigonométrique de la forme: $\int f(\cos x)\sin x dx$

posons $u=\cos x$, $du=-\sin x dx$ on a alors

$$I_1=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int \frac{du}{u^3}=-\int u^{-3}du=-\frac{u^{-3+1}}{-3+1}+C$$

$$=\frac{u^{-2}}{2}+C=\frac{1}{2u^2}+C$$
$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

- $I_2 = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ (voir cours page 21)
- $I_3 = \int \frac{1}{\sin x} dx$ (intégrale trigonométrique forme $\int R(\sin x, \cos x) dx$)

  on pose $t = tg\frac{x}{2}$ on a alors (voir cours)

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$= \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

- $I_4 = \int \frac{dx}{3+e^{-x}}$

$$I_4 = \int \frac{dx}{3+e^{-x}} = \int \frac{dx}{3+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{3e^x+1}$$

Posons $u = 3e^x + 1$, $du = 3e^x dx$

$$I_4 = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|3e^x + 1| + C.$$

- $I_5 = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

$I_5 = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}$ posons $u = e^x$, $du = e^x dx$

$I_5 = \int \frac{du}{1+u^2} = Arctg(u) + C$

$= Arctg\left(e^x\right) + C.$

- $I_6 = \int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^4 x} dx$

$I_6 = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{1-\sin^4 x} dx$ (car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

$= \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)} dx = \int \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)} dx$

remarquer que I_6 est de la forme $\int f\left(\sin x\right)\cos x dx$

posons $u = \sin x$, $du = \cos x dx$

$I_6 = \int \frac{du}{1+u^2} = Arctg(u) + C = Actg\left(\sin x\right) + C.$

- $I_7 = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

  posons $u = e^x + 1$, $du = e^x dx$

  $$I_7 = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$
  $$= 2\sqrt{e^x + 1} + C.$$

- $I_8 = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$

  $$I_8 = \int \frac{\frac{1}{e^x}}{\sqrt{1-\frac{1}{e^{2x}}}} dx = \int \frac{\frac{1}{e^x}}{\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}}} dx = \int \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{e^x}} dx$$
  $$I_8 = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$$

  Remarquer que e^x n'apparait pas au numérateur.

on pose $u = \sqrt{e^{2x} - 1}$, $\underline{u^2 = e^{2x} - 1}$, $2udu = 2e^{2x}dx$, donc $\underline{udu = e^{2x}dx}$,

$$e^{2x} = u^2 + 1 \qquad\qquad udu = \left(u^2 + 1\right) dx$$

On a alors $dx = \frac{udu}{u^2+1}$

$$I_8 = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{1}{u} \frac{udu}{u^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= Arctg\,(u) + C = Arctg\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right) + C.$$

- $I_9 = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

comme pour l'intégrale I_8 la dérivée n'apparait pas au numérateur

même astuce on pose $u = \sqrt{x}$, $u^2 = x$, $2udu = dx$

$$I_9 = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{(1+u^2)u} 2udu = 2\int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= 2Arctg\,(u) + C = 2arctg\,(\sqrt{x}) + C.$$