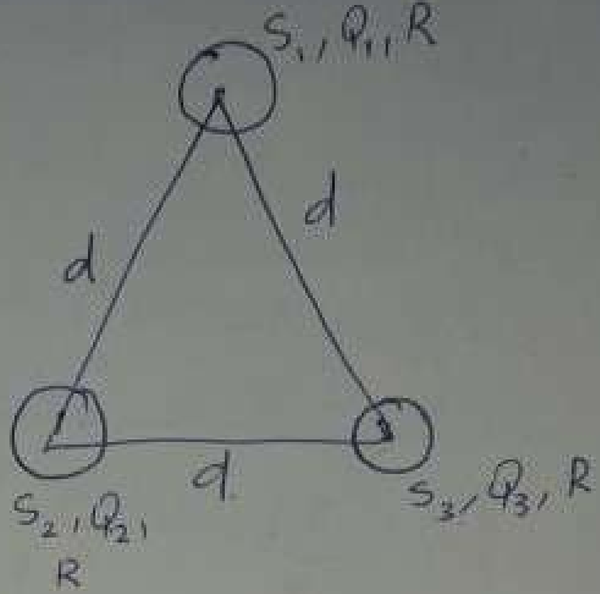
Exo 1 :

(1)

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$



1/

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R} + \frac{kQ_2}{d} + \frac{kQ_3}{d}$$

$$V_2 = \frac{kQ_1}{d} + \frac{kQ_2}{R} + \frac{kQ_3}{d}$$

$$V_3 = \frac{kQ_1}{d} + \frac{kQ_2}{d} + \frac{kQ_3}{R}$$

on a $\alpha = R/d$,

$$V_1 = \frac{k}{R}\left(Q_1 + \alpha Q_2 + \alpha Q_3\right)$$

$$V_2 = \frac{k}{R}\left(\alpha Q_1 + Q_2 + \alpha Q_3\right)$$

$$V_3 = \frac{k}{R}\left(\alpha Q_1 + \alpha Q_2 + Q_3\right)$$

pour determiner les coefficients de capacités C_{ii} et les coefficients d'influences C_{ij} $(i \neq j)$ de ces conducteurs il faut ~~chercher~~ donner $Q_i = f(V_j)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{k}{R} & \frac{k\alpha}{R} & \frac{k\alpha}{R} \\ \frac{k\alpha}{R} & \frac{k}{R} & \frac{k\alpha}{R} \\ \frac{k\alpha}{R} & \frac{k\alpha}{R} & k/R \end{vmatrix} = \frac{k^3}{R^3}\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\Delta = \frac{k^3}{R^3}\left[1\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ \alpha & 1\end{vmatrix} - \alpha\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & 1\end{vmatrix} + \alpha\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ \alpha & \alpha\end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{k^3}{R^3}\left[(1-\alpha^2) - \alpha(\alpha-\alpha^2) + \alpha(\alpha^2-\alpha)\right]$$

$$\boxed{\Delta = k^3/R^3\left(1-3\alpha^2+2\alpha^3\right)}$$ = determinant du système $\{Q\}$

$$* \; Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \frac{k\alpha}{R} & \frac{k\alpha}{R}\\ V_2 & \frac{k}{R} & \frac{k\alpha}{R}\\ V_3 & \frac{k\alpha}{R} & \frac{k}{R}\end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V_1\begin{vmatrix}\frac{k}{R} & \frac{k\alpha}{R}\\ \frac{k\alpha}{R} & \frac{k}{R}\end{vmatrix} - \frac{k\alpha}{R}\begin{vmatrix}V_2 & \frac{k\alpha}{R}\\ V_3 & \frac{k}{R}\end{vmatrix} + \frac{k\alpha}{R}\begin{vmatrix}V_2 & \frac{k}{R}\\ V_3 & \frac{k\alpha}{R}\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\Rightarrow Q_1 = V_1\left(\frac{k^2}{R^2} - \frac{k^2\alpha^2}{R^2}\right) - \frac{k\alpha}{R}\left(\frac{k}{R}V_2 - \frac{k\alpha}{R}V_3\right) + \frac{k\alpha}{R}\left(\frac{k\alpha}{R}V_2 - \frac{k}{R}V_3\right)/\Delta$$

$$= \frac{\frac{k^2}{R^2}\left[(1-\alpha^2)V_1 + (\alpha^2-\alpha)V_2 + (\alpha^2-\alpha)V_3\right]}{\frac{k^3}{R^3}\left(1-3\alpha^2+2\alpha^3\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{R}{k}}_{=\,4\pi\varepsilon_0 R}\frac{\left[(1-\alpha^2)V_1 + (\alpha^2-\alpha)V_2 + (\alpha^2-\alpha)V_3\right]}{1-3\alpha^2+2\alpha^3}$$

par la ~~m~~ façon de calcul, on trouve

$$Q_2 = \frac{R}{K}\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)V_1 + (1-\alpha^2)V_2 + (\alpha^2-\alpha)V_3}{1-3\alpha^2+2\alpha^3}\right]$$

$$Q_3 = \frac{R}{R}\left[\frac{(\alpha^2-\alpha)V_1 + (\alpha^2-\alpha)V_2 + (1-\alpha^2)V_3}{1-3\alpha^2+2\alpha^3}\right]$$

donc les ~~forme~~ éqs en $\{Q_i\}$ prennent la forme

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

d'où par identification ~~la~~ matrice des coeff $\{C\}$

$$C = \frac{R}{K}\,\frac{1}{\underbrace{(1-3\alpha^2+2\alpha^3)}_{\Delta'}}\begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ \alpha^2-\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha \\ \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

delà on identifie $C_{ii} = \frac{R}{K.\Delta'}(1-\alpha^2)$ / $i = \overline{1,3}$

et $C_{ij} = \frac{R}{K.\Delta'}.(\alpha^2-\alpha)$ / $i \neq j$ et $i,j = \overline{1,3}$

matrice(C) st symétrique.

si on se limite à la donnée ; termes aux 2ème ordres, alors

$$* C_{ii} \simeq 4\pi\varepsilon_0 R\,(1-\alpha^2)(1-3\alpha^2)^{-1}$$

$$\simeq 4\pi\varepsilon_0 R(1-\alpha^2)(1+3\alpha^2) \simeq 4\pi\varepsilon_0 R(1+2\alpha^2)$$

$$* C_{ij} \simeq 4\pi\varepsilon_0\,(\alpha^2-\alpha)(1-3\alpha^2)^{-1} \simeq 4\pi\varepsilon_0 R(\alpha^2-\alpha)$$

on remarque que $C_{ii} > 0$ et parce que $\alpha > \alpha^2 \Rightarrow C_{ij} < 0$.

2/ S_1 est mis à la terre puis déconnectée à l'éq $\Rightarrow V_1' = 0$

et elle acquiert la charge q_1' or S_2, S_3 gardent

les charges Q_2, Q_3 respectivement $\Rightarrow$

$$V_1' = \frac{k}{R}\left(q_1^x + \alpha Q_2 + \alpha Q_3\right) = 0 \Rightarrow q_1^x = -\alpha(Q_2+Q_3)$$

on refait les mêmes opérations à S_2 et S_3.

$$V_2' = \frac{k}{R}\left(\alpha q_1 + q_2 + \alpha Q_3\right) = 0. \quad (2)$$

$$V_3' = \frac{k}{R}\left(\alpha q_1 + \alpha q_2 + q_3\right) = 0 \quad (3).$$

$$\text{de } (2) \rightarrow q_2 = -\alpha(q_1 + Q_3) = -\alpha\left[-\alpha(Q_2+Q_3) + Q_3\right]$$

$$\boxed{q_2 = \alpha^2 Q_2 + (\alpha^2-\alpha)Q_3}$$

$$\text{de } (3) \rightarrow q_3 = -\alpha(q_1+q_2) = -\alpha\left[-\alpha(Q_2+Q_3) + \alpha^2 Q_2 + (\alpha^2-\alpha)Q_3\right]$$

$$\boxed{q_3 \simeq \alpha^2(Q_2 + 2Q_3)}$$ en negligeant les termes supérieurs en α.

Ex 03 : (1)

3/ La sphère (Σ) étant au potentiel $V_0 = \frac{KQ}{R} \Rightarrow \boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0}$

* charge répartie sur la surface de (Σ)

la sphère conductrice (Σ') étant initialement neutre. Quand met les deux sphères en contactes, les sphères sont en influences totals, la surface intérieure se charge $(-Q)$ et la surface externe de $(+Q)$.

* Commençons par la région (2) externe à (Σ') : $\underline{r > R_2'}$

pour une surface de Gauss dont $r > R_2'$,

$\sum q_{int} = +Q - Q + Q = +Q$.

théo de Gauss : $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

or $E_r = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V_2(r) = \int -E_r \, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_2$.

l'influence du champ étant nulle à (∞) alors $V_2(\infty) = 0$

$K_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

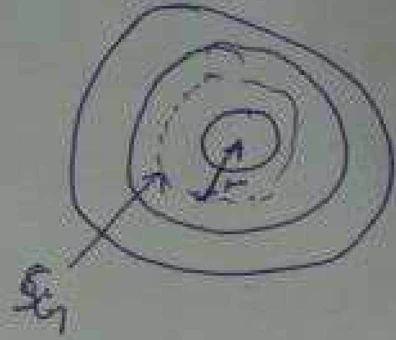
3/ *M ∈ surface externe de (Σ'), $r = R_2'$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_2(R_2') = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} = V(\Sigma')}$

* $R_1' < r \leq R_2'$, $\vec{E} = 0$ et $V(r) = cst$. dans le conducteur (Σ')

②

* $R < r \leq R_1'$, théo de Gauss : $\int \vec{E}.d\vec{S} = +\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$V_1(r) = \int \vec{E}.d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k_1$$

en particulier $V_1(R_1') = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'} + k_1$

or $V_1(R_1') = V_2(R_2') \Longrightarrow \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'} + k_1$

alors la cste d'intégration $k_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2'} - \dfrac{1}{R_1'}\right)$

d'où $V_1(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R_2'} - \dfrac{1}{R_1'}\right)$ $\forall M \in r < R_1'$

en particulier $r = R$ (M ∈ surface du conducteur (Σ))

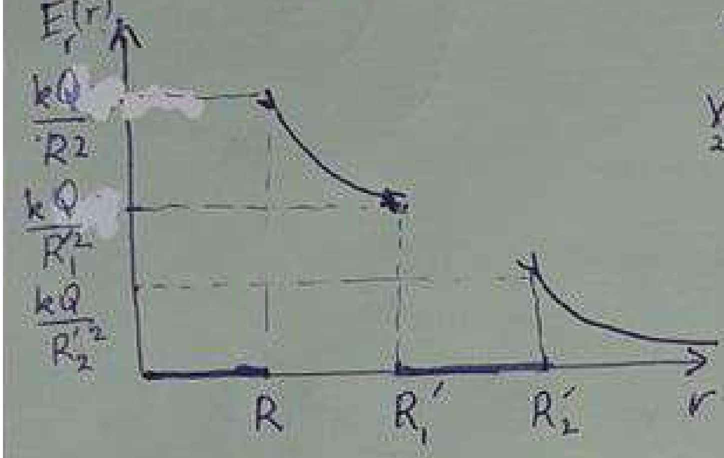
$$V_1(R) = V(\Sigma) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right) \text{ et } E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

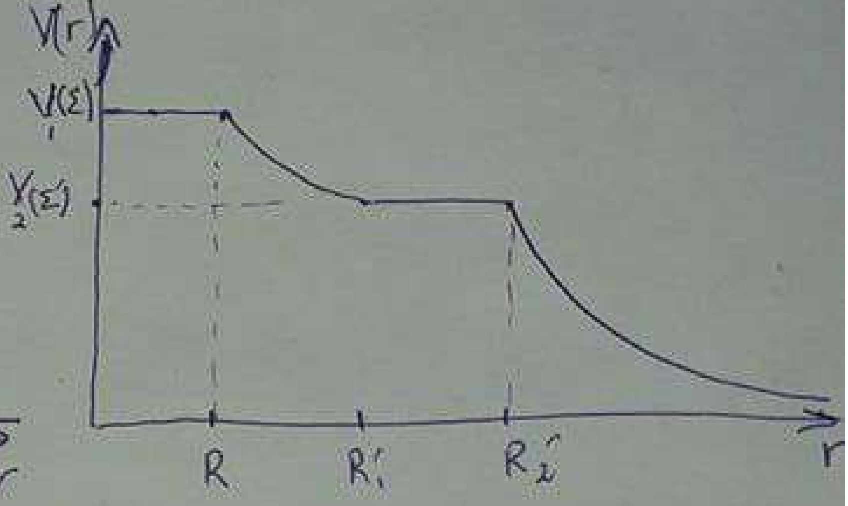
* $r < R$, $\vec{E} = 0$, $V = cst = V_1(R) = V(\Sigma)$.

or $Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$, en particulier :

$$\begin{cases} V_1(\Sigma) = V_0\left(1 + \dfrac{R}{R_2'} - \dfrac{R}{R_1'}\right), \\[2ex] V_2(\Sigma') = V_0 \dfrac{R}{R_2'}, \end{cases}$$

(3)

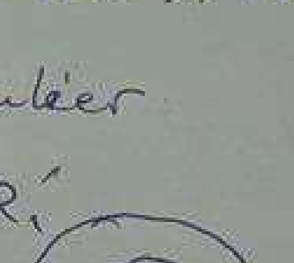




II (Σ') relié à terre $\Rightarrow$ la charge extérieure de (Σ') est nulle

et $V_2(\Sigma') = 0$, $\vec{E_r} = 0 \Rightarrow V(R_2') = 0$ en particulier

or $V_2'(R_1') = V_2'(R_2') \Rightarrow V_2'(R_1') = 0 \quad \forall\ r \geq R_1'$



* $R < r < R_1'$, $V_1'(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k_1'$

or $V_1'(R_1') = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'} + k_1' = 0 \Rightarrow k_1' = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'}$

d'où $V_1'(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1'}\right)$

$\Rightarrow V_1'(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1'}\right) = V_0\left(1 - \dfrac{R}{R_1'}\right) = V_1(\Sigma) \quad \underline{\forall\ 0 \leq r \leq R}$

3/ la sphère (Σ), $V(\Sigma)=0$ et porte la charge q ; la paroi interne de (Σ') porte la charge $(-q)$ et sa paroi externe porte la charge (q'). $\to$ (influence totale Σ et Σ') (Σ') étant isolée à nouveau, on a conservation de charge $-q+q'=-Q \Rightarrow q'=q-Q$.

en appliquant théo de Gauss,

4

$$\oint_{S_G} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}(S_G)}{\varepsilon_0}$$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = q - q + q' = q - Q$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_3(r) = \frac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad / \; V(\infty)=0. \; \forall r \geq R_2'$$

en particulier $V_3(R_2') = \dfrac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} = V(\Sigma')$.

pour $r \leq R_1'$, $\quad V_3'(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k_3$

en particulier, $V_3'(R_1') = V_3(R_2') \Rightarrow \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'} + k_3 = \dfrac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'}$

d'où la cste d'intégration $\boxed{k_3 = \dfrac{q-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1'}}$

$$\text{d'où } V_3'(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'}$$

$$\text{en particulier } V_3'(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2'}$$

or $V'_3(R) = V(\Sigma) = 0$ (Σ reliée à terre) $\Rightarrow$

$$q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1}\right) = \frac{Q}{R'_2}$$

5

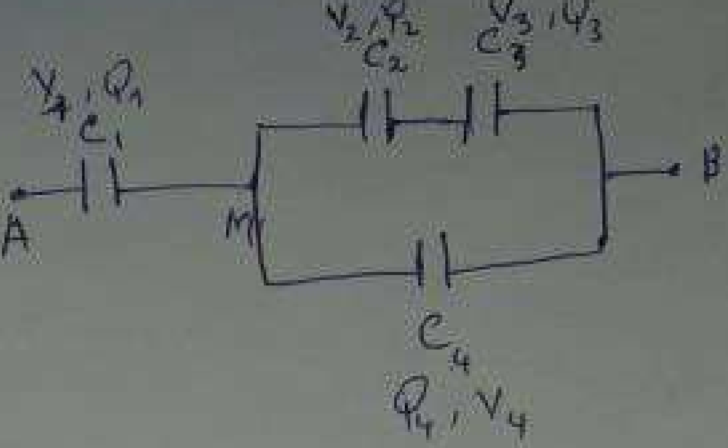
$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{Q R R'_1}{R'_2 R'_1 + R R'_1 - R R'_2}}$$ charge que porte (Σ) reliée à terre.

$$V(\Sigma') = \frac{q - Q}{4\pi\varepsilon_0 R'_2} = \boxed{\frac{Q(R'_1 - R)}{4\pi\varepsilon_0 (R'_2 R'_1 + R R'_1 - R R'_2)} = V(\Sigma')}$$

or $Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$

~~Alors~~ $$\boxed{V(\Sigma') = \frac{R V_0 (R'_1 - R)}{R'_2 R'_1 + R R'_1 - R R'_2}}$$

EX04 :



On a $Q_2 = Q_3 = Q$

$\Rightarrow C_2 V_2 = C_3 V_3$

et $V_2 + V_3 = V_{MB} = \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$

$= Q\left[\frac{C_3 + C_2}{C_2 C_3}\right] = Q\left(\frac{2C + C}{2C.C}\right) = \boxed{\frac{Q.3}{2C} = V_{MB}}$

$\Rightarrow C'_{éq} = \frac{2C}{3}$ pour (C_2, C_3)

on a : $V_4 = V_{MB} \Rightarrow \frac{Q_4}{C_4} = \frac{3Q}{2C} \rightarrow Q_4 = \frac{3C_4}{2C} Q$

or $C_4 = 3C \longrightarrow \boxed{Q_4 = \frac{9Q}{2}}$

La chrge totale ds la branche MB :

$Q_{MB} = Q_4 + Q \Longrightarrow C_4 V_4 + \frac{2C}{3} . V_{MB} = \left(3C + \frac{2C}{3}\right) V_{MB} = \frac{11C}{3} V_{MB}$

$\boxed{C_{MB} = \frac{11C}{3}}$ équivalente

$V_{AB} = V_{AM} + V_{MB} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_{MB}}{C_{MB}}$ or $Q_1 = Q_{MB}$

$= Q_{MB}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{MB}}\right) = \frac{Q_{MB}}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_{eq}}$

$1/C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{MB}} = 1/3C + \frac{1}{\frac{11C}{3}} = \frac{20}{33C}$

$$\boxed{C_{eq(2)} = \frac{33C}{20}} \quad , \; AN : C_{eq} = \frac{33 \times 2\mu F}{20} = 3{,}3\,\mu F.$$

$V_{AB} = 2000$ Volt :

$$Q_1 = C_{eq} \cdot V_{AB} = 3{,}3 \times 10^{-6} \times 2000 = \boxed{6{,}6 \cdot 10^{-3} C = Q_1}$$

$$V_1 = V_{AM} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-3}}{3 \times 10^{-6} \times 2} = \boxed{1100 \text{ volt} = V_1}$$

$$* \; V_{MB} = V_{AB} - V_{AM} = 2000 - 1100 = \boxed{900 \text{ volt} = V_{MB}}$$

or $V_{MB} = V_4 = 900$ volt.

$$Q_4 = C_4 V_4 = 3 \times 2 \times 10^{-6} \times 900 = \boxed{5{,}4 \cdot 10^{-3} C = Q_4}$$

On a encore $Q_4 = \frac{9Q}{2} \rightarrow Q = \frac{2Q_4}{9} = \frac{2 \times 5{,}4 \cdot 10^{-3}}{9} = 1{,}2 \times 10^{-3} C$

$$\boxed{Q = Q_3 = Q_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3} C}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}} = 600 \text{ volt}.$$

et $V_3 + V_2 = V_{MB} \Rightarrow V_3 = V_{MB} - V_2 = 900 - 600 = 300$ volt

ou $V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-6}} = 0{,}3 \cdot 10^{3} = 300$ volt.