Université d'Oran 1
L1.ST Génie biomédical

COURS 1

LES FONCTIONS REELLES A UNE VARIABLE REELLE (LIMITE ET CONTINUITE)

MEBARKI.L

1) Fonction

1.1 Définition :

f : E→F est une fonction $f(x)$ de la variable x si pour tout x dans E, f lui fait correspondre une valeur déterminée (unique) $y = f(x)$ de F.

- x: est la variable, y : est l'image.
- E est le domaine de définition de f.

1.2 Exemples :

1) $x \to f(x) = 2x + 3,\ f\ est\ définie\ sur\ \ \mathbb{R}$.

2) $x \dashrightarrow f(x)$= $\sqrt{1 - x^2}$, f est définie sur l'intervalle fermé $[-1,1]$

2) Limites

2 .1 Définition (limite)

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x définie sur l'intervalle $[a, b]$ (Sauf peut-être pour la valeur x_0). On dit que $f(x)$ a pour limite l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=$l$.

Si en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées de x_0 , on rend $f(x)$ aussi proche de l, que l'on veut.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 \; tel \; que$$

$$|x - x_0| < \mu \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Application :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$=$2x + 3$

Montrons que : $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$, trouvons μ

Considérons $|f(x) - 5|$

$|f(x) - 5|$=$|2x + 3 - 5|$=$|2x - 2|$=$2|x - 1|$

$|f(x) - 5| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{2.10^6}$

On dira alors :

Pour $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$, il existe μ=$\frac{1}{2.10^6}$ tel que $|x - 1| < \mu \Rightarrow$ $|f(x) - 5| < \varepsilon$

Remarque:

Une fonction peut avoir une limite à gauche et une limite à droite.

Exemple : $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ = $\lim_{X \to 0^+} \frac{x}{x}$=1

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ = $\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{-x}{x}$=-1

2.2 Extension de la notion de limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall \boldsymbol{A} > 0, \exists \mu > 0 \; tel \; que: \; |x - x_0| < \mu \Rightarrow f(x) > A$$

De même pour $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\forall \boldsymbol{A} > 0, \exists \mu > 0 \; tel \; que \; |x - x_0| < \mu \;\Rightarrow f(x) < -A$

De même aussi pour

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l \;\; et \; \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \; \pm\infty$

2. 3 propriétés des limites

$f \; et \; g \; deux$ fonctions telles que :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (\,f(x) + g(x)) = l + l'$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} (\,f(x).\, g(x)) = l.\, l'$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda\, f(x)) = \lambda l$
4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$ avec $l' \neq 0$

Remarque :

Les formes indéterminées sont :

$(+\infty) + (-\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$.

2. 4 Quelques méthodes de calculs de limites

2.4.1 Unicité de la limite

La limite si elle existe, elle est unique, par conséquent si une fonction admet une limite à gauche différente de la limite à droite en un point, on dira qu'elle n'a pas de limite en ce point.

2.4.2 Proposition

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ et $g(x)$ bornée ($|g(x)| \leq M,\ \ M > 0$)

Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 0} x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Car : $\lim_{x \to 0} x^2 = 0,\quad \left|cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

2.4.3 Fonctions équivalentes

Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage d'un point x_0 et on écrit $f \sim g$ au $v(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exemples :

$sinx \sim x$ au $v(0)$

tg x$\sim x$ au $v(0)$

$P(x)$ =$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \ldots + a_n x^n \sim a_n x^n$ au $v(\infty)$.

Exemple de limite :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\alpha x}{sin\beta x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha x}{\beta x}$=$\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3) La continuité

3.1 Continuité en un point

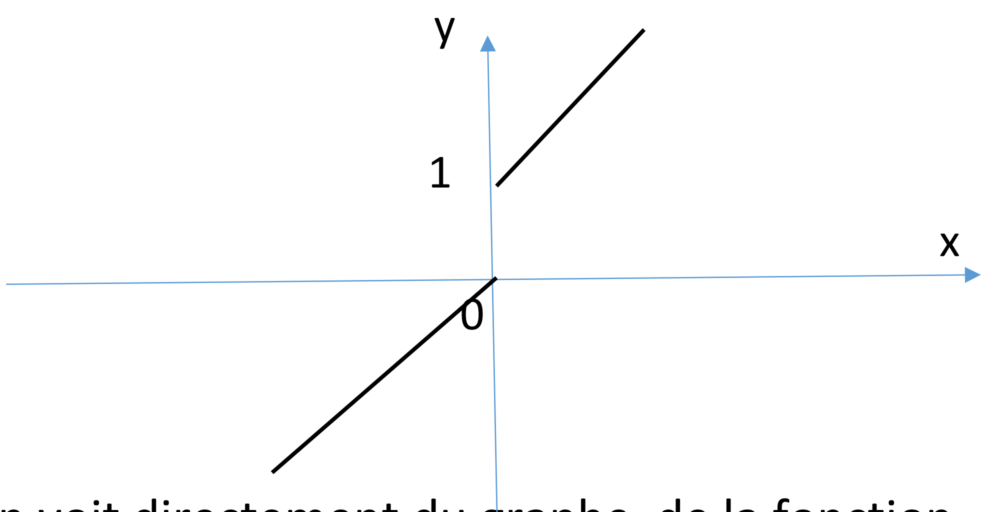
On dit qu'une fonction $f(x)$ est continue au point x_0 si

$\ast$ $f(x)$ est définie au point x_0 c.a.d $f(x_0)$ existe

$\ast$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\left(\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0) \right)$

On dira que f est continue sur un ensemble E si elle est continue en tout point x de E.

Exemple : $f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \; x > 0 \\ \quad x \quad si \; x \leq 0 \end{cases}$



On voit directement du graphe de la fonction f, qu'elle n'est pas continue au point 0.

D'après la définition on a : $f(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0 = f(0).$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x + 1 = 1 \neq f(0).$$

Remarques

- Les propriétés des limites nous donnent :
  Si $f \; et \; g$ sont continues au point x_0 alors
  $f(x) + g(x)$, $\lambda f(x)$, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)} \; (g(x_0) \neq 0)$
  Sont continues au point x_0.

- Les fonctions usuelles (fonctions polynômes, fractions rationnelles, exp, ln, cos, sin, tg ….) sont continues dans leurs domaines de définition.

2.2 Cas d'une fonction composée

f et g deux fonctions de la variable x. Tel que :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g\big(f(x)\big)$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Si f est continue au point x_0 et g est continue au point $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue au point x_0 .

Des Rappels utiles

Fonction paire, fonction impaire et fonction périodique

- On dit qu'une fonction est <u>*paire*</u> si $f(-x) = f(x)$

Exemples : $f(x) = x^2$, $f(x) = cosx$, $f(x) = sin^2x + 1$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.

- On dit qu'une fonction est <u>*impaire*</u> si $f(-x) = -f(x)$

Exemples : $f(x) = x^3$, $f(x) = sinx$, $f(x) = tgx$.

Le graphe d'une fonction impaire admet 0 comme centre de symétrie.

- On dit qu'une fonction $f(x)$ définie sur I, est <u>*périodique*</u> s'il existe un nombre positif T tel que :
$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

On dira alors que T est la période de $f(x)$.

Proposition :

Si T est la période de $f(x)$ alors kT est aussi période de $f(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

<u>Pour la preuve</u> : utiliser la récurrence

TD 1 ($\mathbf{1^{ere} partie}$)

Exercice 1

Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{sin^2(\pi x)}{x-1}$ (poser $X = x - 1$), $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sinx}$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} 2x + 1\sqrt{x^2 + x - 2}$, $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{sin^2 x}\frac{1}{x^2})$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-sinx}{x+sinx}$.

Exercice 2

Trouver les limites à gauche et à droite :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{|sinx|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Exercice 3

1)Trouver a pour que f soit continue sur son domaine de définition :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$$

2) Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition

$$g(x) = xsin\left(\frac{1}{x}\right),\ h(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ cosx & si\ x < 0 \end{cases}$$