Faculté de Médecine d’Oran
Laboratoire de Biostatistique

LA VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE

BOUKERMA AMEUR

La variable aléatoire continue :

I. a. Définition :

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle. En règle générale, toutes les variables qui résultent d’une mesure sont de type continu.

Exemples :

Les variables aléatoires,

- le masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- taux de glucose dans le sang, - etc.Sont des variables aléatoires continues

I. b. La Fonction densité de probabilité :

Dans le cas d'une **variable aléatoire continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**.
En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.
On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $P\ (a \leq X \leq b)$.
Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle **fonction densité de probabilité** ou **densité de probabilité**

On appelle densité de probabilité toute application continue :

Telle que :

$$\text{(i)}\quad f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R};$$

$$\text{(ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

(P1) x € R $f(x) \geq 0$

(P2) $\int^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (en supposant que $\int^{\infty}_{-\infty} f(x)\, dx$ existe

I.c. La Fonction de répartition :

La fonction de répartition F(x) et la fonction densité de probabilité $f(x)$ est la suivante :

$$" t \in \mathrm{R} \quad F_{X(t)} = P(X < t) = \int_{\mathbf{a}}^{x} f(t)\, dt$$

la fonction de répartition F(x) est la primitive de la fonction densité de probabilité f (x), et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X.

I.d. Espérance mathématique et la variance :

1. *Espérance mathématique E(X) :*

Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f., on appelle ***espérance*** *de X, le réel E(X), défini par :*

$$\mathbf{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}$$

2. *Variance V(x) :*

Si X est une variable aléatoire continue donnée par sa densité de probabilité alors la variance de X est le nombre réel positif tel que :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - [E(X)]^2$$

Exemple

La vie utile d'une certaine composante d'une pièce électronique est décrite par le densité de probabilité suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{18} & 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où x est exprimé en centaines d'heures.

a-Prouver que l'on a bien une fonction de densité;;

b-Calculer : P(x ≤ 2); P(x > 4) et P (2 ≤ x ≤ 4).

c-Calculer E(x) et V(x).

d-Déterminer la fonction de répartition F(x).

Réponse :

a) $\rightarrow \int_0^6 \frac{x}{18}dx = 1 \rightarrow \left[\frac{x^2}{36}\right]_0^6 = F(6) - F(0) = \frac{36}{36} = 1$ La fonction a une densité de Probabilité

c) P (x≤2)= $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{18}dx = \left[\frac{x^2}{36}\right]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{4}{36}$

P(x>4)= $\int_4^6 \frac{x}{18}dx = F(6) - F(4) = \frac{36}{36} - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

P (2 ≤ x ≤ 4) = $\int_2^4 \frac{x}{18}dx = F(4) - F(2) = \frac{16}{36} - \frac{4}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

d) E(x)= $\int_0^6 xf(x)dx = \int_0^6 \frac{x^2}{18}dx = \left[\frac{x^3}{54}\right]_0^6 = F(6) - F(0) = \frac{216}{54} = 4$

$$V(x) = \int_0^6 x^2 f(x)dx - E(x)^2 = \int_0^6 \frac{x^3}{18}dx - E(x)^2 = \left[\frac{x^4}{72}\right]_0^6 - E(x)^2 = [F(6) - F(0)] - 4^2 = \frac{1296}{72} - 16 = 18 - 16 = 2$$

e) F(x) = $$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{18}\,dt = \left[\frac{t^2}{36}\right]_0^x = \frac{x^2}{36}$$

Exemple 2:

Soit la fonction de densité f(x) telle que:

$$f(x) = kx \; si \; 1 \leq x \leq 2 \;\; et \;\; f(x) = 0 \;\; si \;\; x \notin [1-2]$$

1. ♣ Déterminer la constante k pour que f(x) soit une fonction de densité.
2. ♣ Calculer E(x) et V(x).
3. ♣ Déterminer la fonction de répartition F(x).Faire sa représentation graphique.

Exemple 2:

1Déterminer la constante k pour que f(x) soit une fonction de densité

$$f(x) = kx \; si \; 1 \leq x \leq 2 \; et \; f(x) = 0 \; si \; x \notin [1-2]$$

Réponse:

Pour que X soit une fonction de densité, il faut que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{2} kx \; dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k[\frac{x^2}{2}]_1^2 = 1 \Rightarrow k[F(2) - F(1)] = k[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}] = 1 \Rightarrow k \quad \frac{3}{2} = 1$$

D'où k = 2/3

2. ♣ Calcul de la moyenne E(x)

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx=\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{1} x\ f(x)dx}+\int_{1}^{2} x\ f(x)dx+\cancel{\int_{2}^{+\infty} x\ f(x)dx}}_{=0}$$

$$car\ \ f(x)=kx\ si\ 1\leq x\leq 2\ et\ \ f(x)=0\ \ si\ \ x\notin[1-2]$$

Or k = 2/3

$$E(x)=\int_{1}^{2} x\ \ \frac{2}{3}x\ dx=\int_{1}^{2}\frac{2}{3}x^2\ dx=\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{9}$$

2. ♣ Calcul de la variance V(x)

On sait que V(x) = E(x)² – [E(x)]², par conséquent on peut écrire:

$$V(x)=\int_1^2 x^2\ \frac{2}{3}x\ -\left(\frac{14}{9}\right)^2=\frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2-\left[\frac{14}{9}\right]^2$$

$$V(x)=\frac{2}{3}\left[\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right]-\left[\frac{14}{9}\right]^2$$

D'où V(x) = 2/3[16/4 – 1/4]-[14/9]^2 = (30/12) – (14/9)^2= 0,327

3. ♣ Fonction de répartition F(x)

Représentation graphique de la fonction de répartition

- ♠ si $x < 1$: $F(x) = 0$
- ♠ si $1 < x < 2$: $F(x) = 1/3\ x2 - 1/3$ (Ex: pour $x=3/2$, $F(x)= 5/8$.
- ♠ si $x > 2$: $F(x) = 1$