Exercice N°01 :

Une variable aléatoire discontinue peut prendre les valeurs : 0, 1, 2 avec les probabilités respectives : 1/2 ; 3/10 ; et a

a) Calculer a
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance.
c) Représenter graphiquement cette loi de probabilité.
d) Déterminer et construire le graphe de la fonction de répartition.

a) Pour déterminer la probabilité a, on sait que :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} P_i = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + a = 1 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

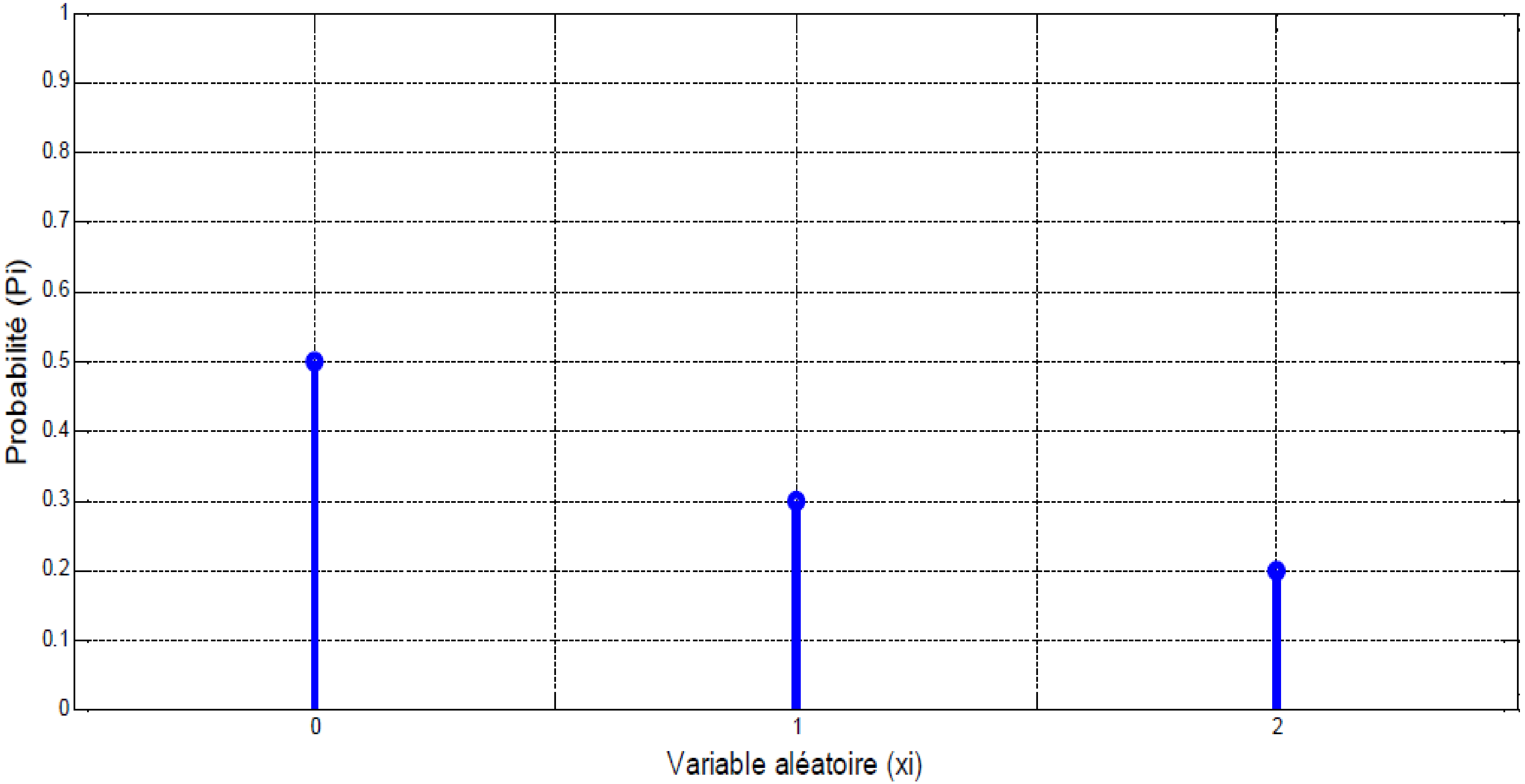
b) Calcul de l'espérance mathématique et la variance :

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2
$\boldsymbol{P_i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
$\boldsymbol{x_i P_i}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\boldsymbol{x_i^2 P_i}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{7}{10}$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i{}^2 P_i - [E(x)]^2 = \frac{61}{100}$$

c) Représentation graphique de la loi de probabilité :

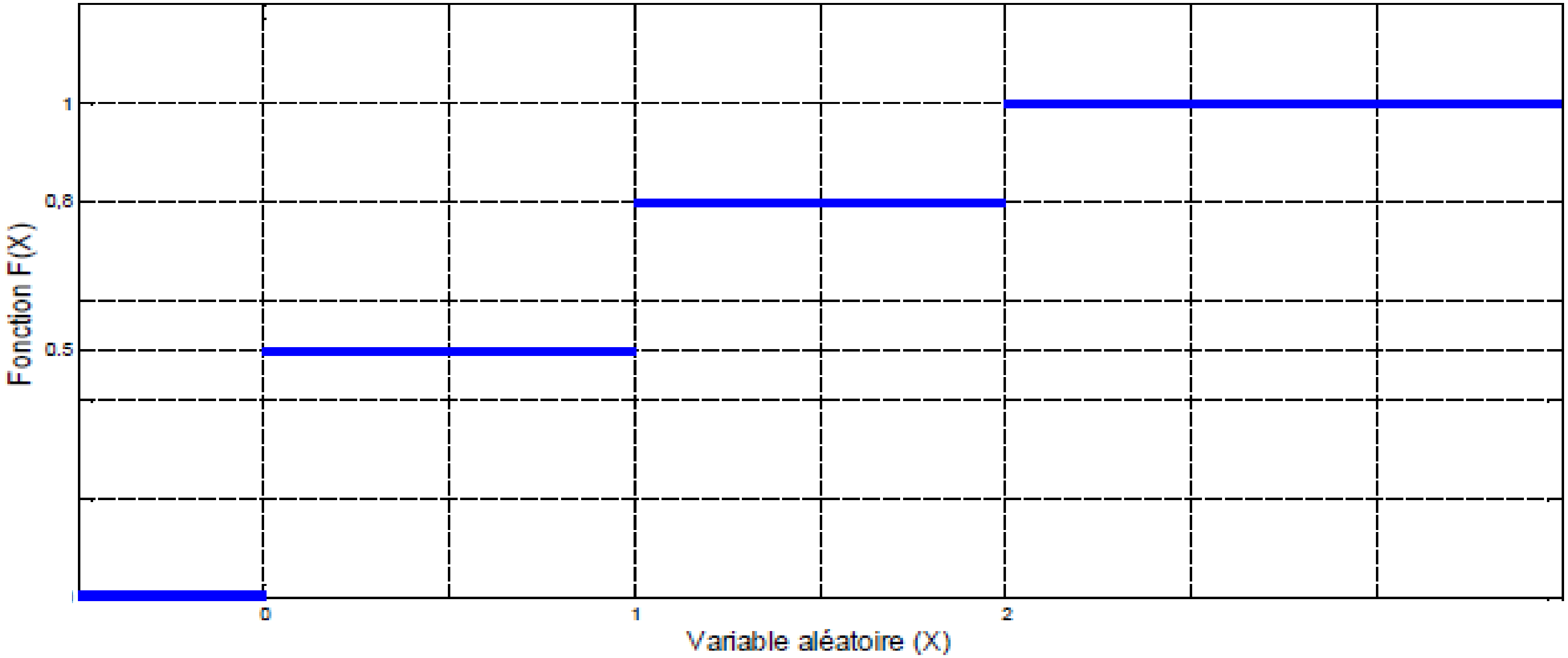


Intitulé :Représentation de la loi de probabilité.

d) Représentation de la fonction de répartition :

On a $F(X) = P(X < x) = \sum_{j=0}^{x-1} P(X = j)$

- Pour $x < 0$: $F(X) = 0$
- Pour $0 \leq x < 1$: $F(X) = \frac{1}{2}$
- Pour $1 \leq x < 2$: $F(X) = P_1 + P_2 = \frac{4}{5}$
- Pour $x \geq 2$: $F(X) = P_1 + P_2 + P_3 = 1$



Intitulé :Représentation de la fonction de répartition.

Exercice 2

On suppose que la probabilité élémentaire pour qu'un nouveau-né soit un garçon est de 0,5. Cette probabilité est indépendante des individus.

Quelle est la probabilité pour que sur cinq nouveau-nés il y ait :

1. Deux garçons ?
2. Au moins deux garçons ?
3. Au plus deux garçons ?
4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la distribution des garçons.

Solution :

P : Probabilité élémentaire pour qu'un nouveau né soit un garçon.

$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$: Cette probabilité suit une loi binomiale $\mathcal{B}$(n ; p)

$\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$(Probabilité de l'évènement contraire).

$\boldsymbol{n} = 5$

La loi Binomiale : $P(x) = C_n^x\, p^x q^{n-x}$

1. La probabilité d'avoir 2 garçons sur 5 nouveaux nés :

$x = 2$

$P(2) = C_5^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^3 = 0{,}3125$ (à partir du tableau).

2. La probabilité d'avoir au moins deux garçons:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$

$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$= 1 - \left[C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]$$

$$= 1 - (0{,}0312 + 0{,}1562) = 0{,}8126$$

3. La probabilité d'avoir au plus deux garçons:

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0{,}0312 + 0{,}1562 + 0{,}3125 = 0{,}5$$

4. Calcul de l'espérance mathématique et de la variance de la distribution des garçons:

$$E(x) = np = 5 \times \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$V(x) = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1{,}25$$

Exercice 3

La probabilité pour qu'un individu ait une mauvaise réaction à l'injection d'un certain sérum est de 0,001.

Déterminer la probabilité pour que sur 2000 individus :

1. 3 individus aient une réaction dangereuse.
2. Plus de 2 individus aient une réaction dangereuse.

A justifier la loi de probabilité utilisée.

Solution :

$p = 0{,}001$

$q = 0{,}999$

$n = 2000$

$X \curvearrowright \mathcal{B}(2000\ ;\ 0.001)$

1. La probabilité pour que 3 individus aient une réaction dangereuse :

$$P(X = 3) = C_{2000}^{3}\, p^3 q^{1997} = C_{2000}^{3}\ (0.001)^3\ (0{,}999)^{1997} = 0{,}18$$

On peut calculer la probabilité d'une autre méthode puisque les 3 conditions de la loi de probabilité présentent :

a. $(\boldsymbol{n})$ est très grand $(n \geq 30)$;

b. $(\boldsymbol{p})$ est très faible $(p < 0{,}1)$;

c. $\lambda = np = 2 \quad < 5$

On peut procéder par approximation à la loi de poisson et on pose : $P(X = x_i) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}18$$

2. La probabilité pour que plus de 2 individus aient une réaction dangereuse :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^1 e^{-2}}{2!}$$

$$= 1 - [0{,}135 + 0{,}27 + 0{,}27] = 0{,}325$$

Exercice 4

La variable aléatoire continue x de densité de probabilité $c(4x - x^2)$, est définie sur l'intervalle de : 0 à 4.

1. Déterminer la valeur de la constante C.
2. Représenter graphiquement la loi de probabilité correspondante.
3. Quelle est la fonction de répartition attachée à cette loi de probabilité ? Représenter graphiquement sa variation.

1. Détermination de la valeur C :

$$f(x) = C(4x - x^2) 0 \leq x \leq 4$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^4 C\,(4x - x^2)dx = 1 \Leftrightarrow C\left[\frac{4}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 1$$

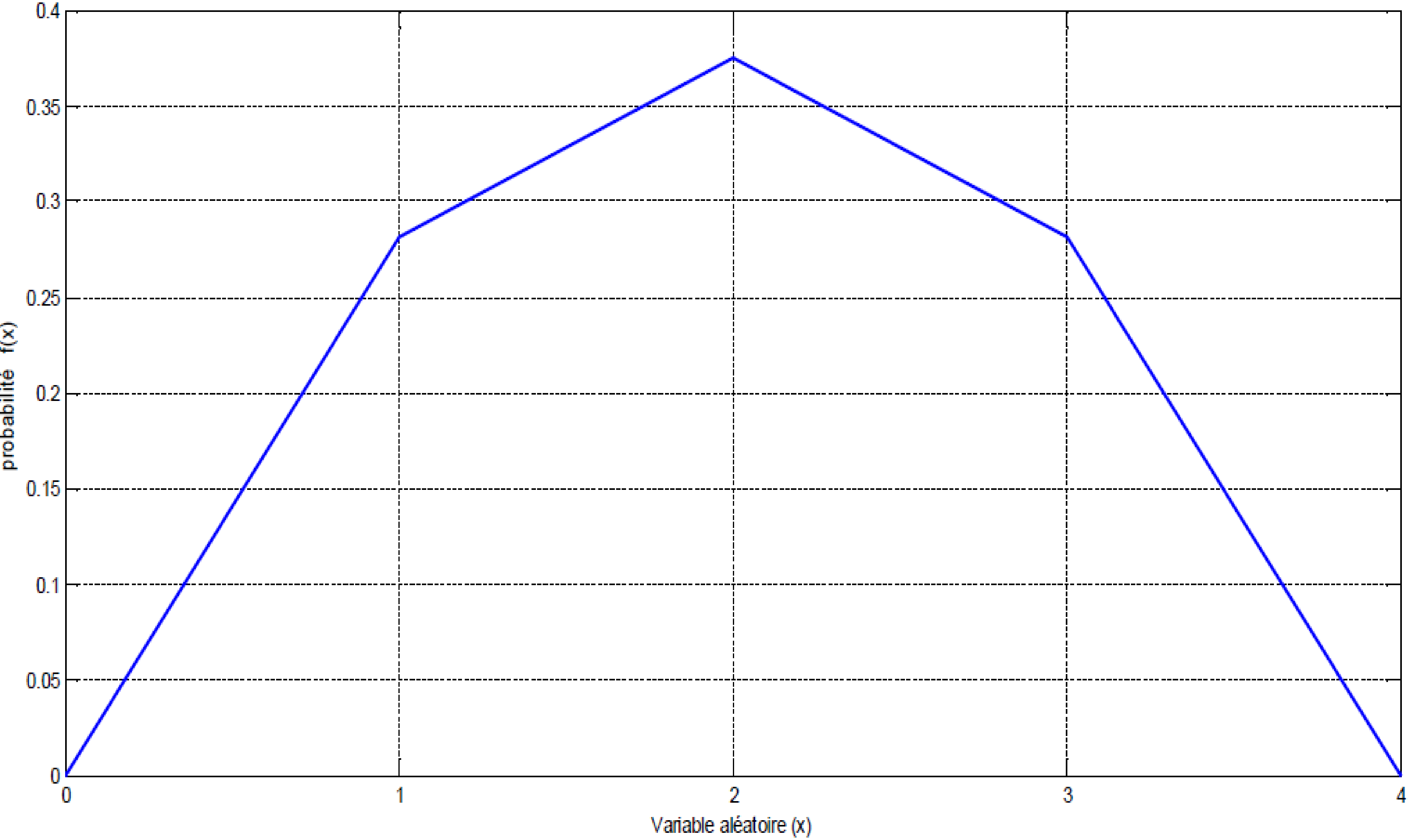
$$\Leftrightarrow C\left(\frac{-64}{3} + 32\right) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{3}{32}(4x - x^2) \qquad 0 \leq x \leq 4$$

2. Représentation graphique de la loi de probabilité correspondante :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	$\frac{9}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{9}{32}$	0

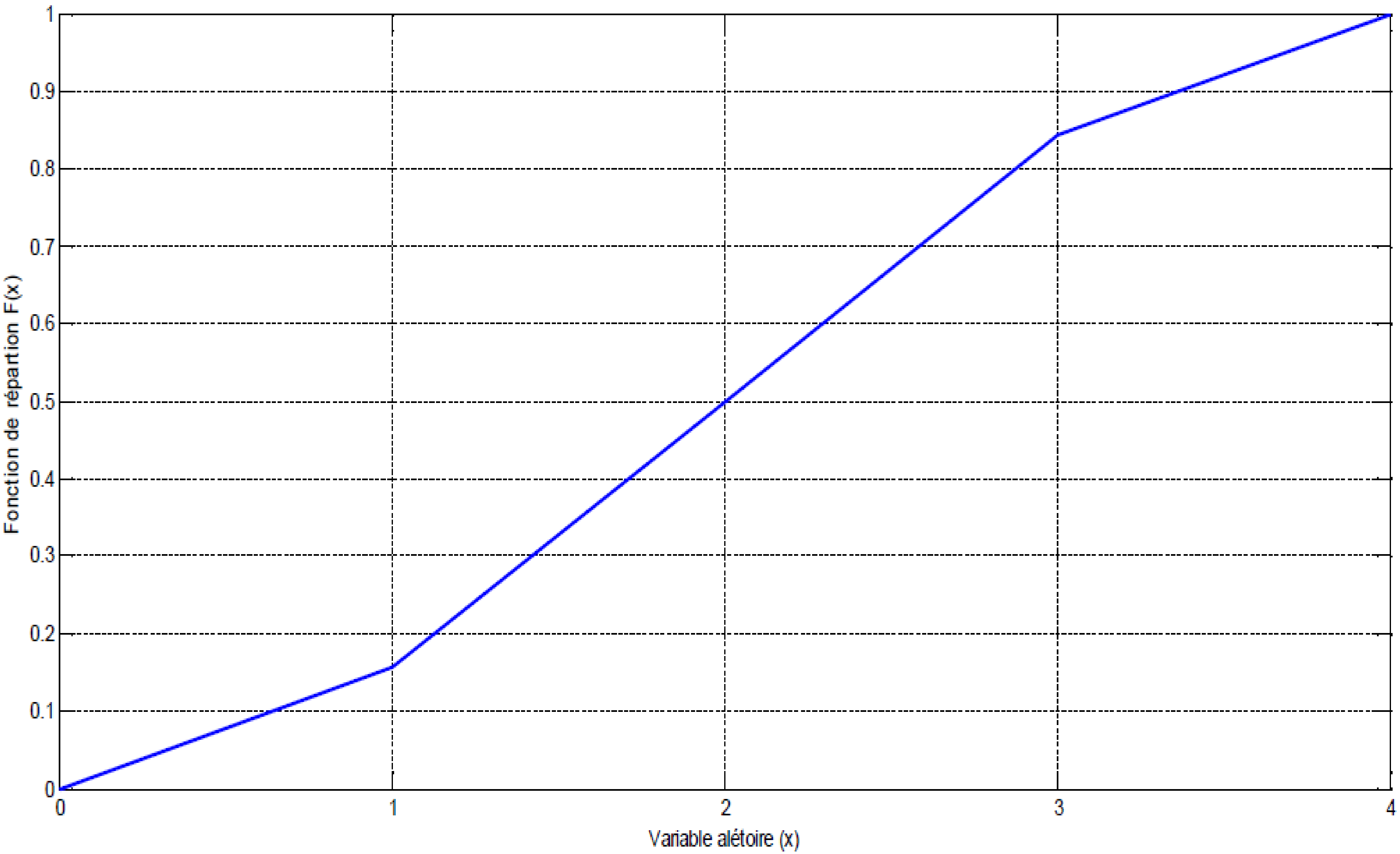

0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
probabilité f(x)
0
1
2
3
4
Variable aléatoire (x)

3. Fonction de la répartition attachée à la loi de probabilité :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \frac{3}{32}(4t - t^2)dt = \frac{3}{32}\left[\frac{t^2}{2}100 - \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \tfrac{3}{32}\left(2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)$$

x	0	1	2	3	4
$F(x)$	0	$\frac{5}{32}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{27}{32}$	1



Fonction de répartion F(x)
Variable alétoire (x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4