2020-2021

Université Oran 1

L1.ST Génie Biomédical

COURS 2

LES FONCTIONS REEELLES A UNE VARIABLE

L.MEBARKI

3) Dérivée et différentiabilité d'une fonction d'une variable

3.1 Dérivée

3.1.1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction de x, définie en x_0 .

Si on donne à x_0 un accroissement Δx, la fonction $y = f(x)$ subi un accroissement Δy , $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite finie quand Δx tend vers 0. Cette limite s'appellera dérivée de $f(x)$ au point $x = x_0$

On écrira alors :

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

On a défini ainsi une nouvelle fonction appelée fonction dérivée.

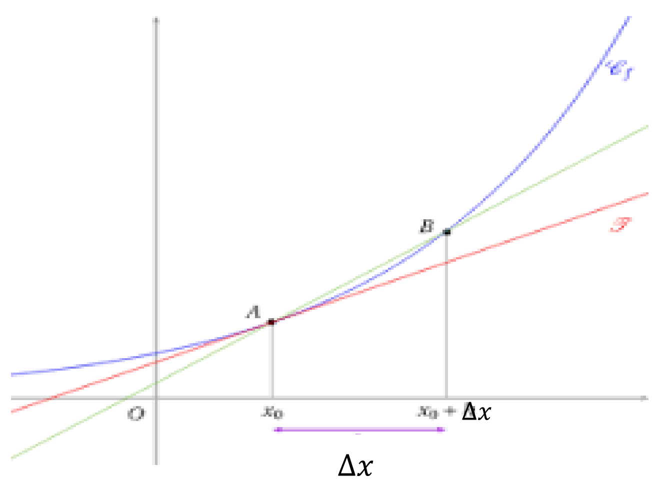
• f est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.

3.1.2 signification géométrique

Soit (C_f) la courbe de la fonction $\underline{y = f(x)}$

Soient les points A et B sur (C_f)

$A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$



Considérons la droite AB

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x \to 0$ la droite AB tendra vers une position limite $A\mathcal{T}$,

$A\mathcal{T}$ est la tangente à la courbe au point A.

On aura $tg\alpha_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Conclusion : Si une fonction $y = f(x)$ admet une dérivée finie $f'(x_0)$ en un point x_0 alors sa courbe $\left(C_f\right)$ présentera une tangente au point x_0 de pente $tg\alpha_0 = f'(x_0)$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\right)$

Remarque :

Il se peut que la limite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ diffère suivant que :

$\Delta x \overset{>}{\to} 0$ ou $\Delta x \overset{<}{\to} 0$

On parlera alors de dérivée à droite et de dérivée à gauche mais au point x_0 la fonction n'est pas dérivable.

Géométriquement au point $\left(x_0, f(x_0)\right)$, la courbe de f admet deux tangentes de pentes différentes, on parlera alors d'un point anguleux.

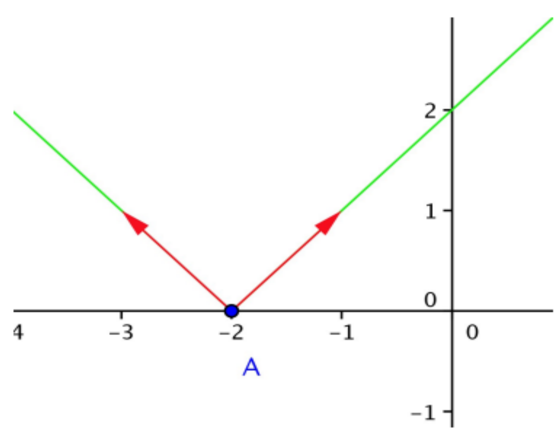
Exemple :

$f(x) = |x+2|$, f n'est pas dérivable au point x_0=-2

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$$

Ce qui donne

$$\lim_{\Delta x \overset{>}{\to} 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \overset{<}{\to} 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$



La fonction n'est pas dérivable au point -2, sa courbe présente deux demi-tangentes au point -2.

3.1.3 Relation entre la dérivabilité et la continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$

Si f est dérivable au point x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve :

Supposons que f dérivable au point x_0

posons $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$=$g(x)$

$f(x) - f(x_0)$ =$g(x)(x - x_0)$ on a alors

$f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$ en passant à la limite on a

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ =$f(x_0)$+$f'(x_0)$.0=$f(x_0)$ car

$\lim_{x\to x_0} g(x)$ = $f'(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)$=0

Donc f est continue au point x_0

Attention :

Si f est continue en x_0, on ne peut rien dire sur la dérivabilité de f en x_0.

Exemple :

$f(x)$ =$\sqrt{x}$

f est continue au point 0 , mais f n'est pas dérivable au point 0

En effet :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$=$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$=0=$f(0)$

Et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$=+∞ f n'est pas dérivable en 0

Remarque :

En pratique on utilise la contraposée de ce théorème

Si f n'est pas continue en x_0 alors f n'est pas dérivable en x_0.

3.1.4 Applications

En utilisant la définition de la dérivée, trouvons les dérivées des fonctions élémentaires suivantes :

1) $f(x)$= C, C constante

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x}$=0=$C'$.

2) $f(x)$=$\sqrt{x}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$=$\left(\sqrt{x}\right)'$

3) $f(x)$= x^n, $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$= $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\cdots\ldots+\Delta x^n-x^n}{\Delta x}$=

= $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots \ldots\ldots + \Delta x^{n-1}\right)$ =nx^{n-1}=$(x^n)'$.

(On utilise le binôme de Newton : $(a+b)^n$ =$a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \ldots\ldots + b^n$.)

On peut aussi montrer par récurrence que : $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.1.5 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées alors on a :

1) $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
2) $\left(\lambda f(x)\right)' = \lambda f'(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Pour la preuve : on utilise la définition de la dérivée $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, les propriétés de la limite et le fait que les fonctions f et g sont continues car dérivables.

3.1.6 Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Si g est une fonction dérivable en x_0 et f est dérivable en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(f \circ g)'(x_0)=f'(g(x_0)).\, g'(x_0).$$

Preuve :

On considère $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(g(x_0+\Delta x)\right)-f\left(g(x_0)\right)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(g(x_0+\Delta x)\right)-f\left(g(x_0)\right)}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$$

On pose $X = g(x_0)$, $\quad \Delta X = g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$

Quand $\Delta x \to 0$, $\Delta X \to 0$ (car g étant dérivable en x_0 elle est continue en x_0 et donc $g(x_0 + \Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} g(x_0)$).

On aura alors :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(g(x_0)+\Delta X)-f\big(g(x_0)\big)}{\Delta X} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$$

$$=f'\big(g(x_0)\big).g'(x_0).$$

Application :

f étant une fonction dérivable alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \big(f^n(x)\big)'=nf^{n-1}(x).f'(x)$$

En effet :

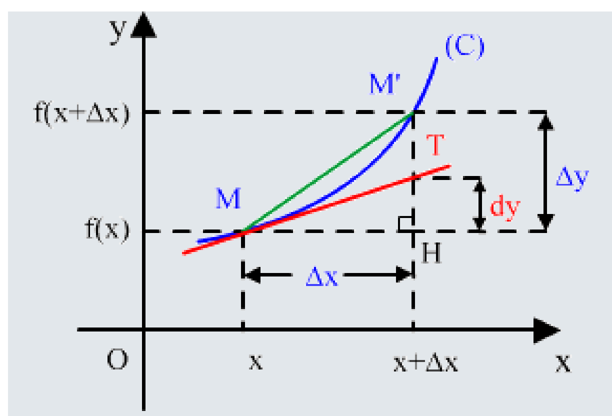
$f^n(x) = g\big(f(x)\big)$ avec $g(x)=x^n$

$\big(f^n(x)\big)'=g'\big(f(x)\big).f'(x) = nf^{n-1}(x).f'(x)$

3.2 Différentielle d'une fonction à une variable

La dérivée au point $M\big(x, f(x)\big)$ est :

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$ = pente de la tangente MT à la courbe (C) au point M



Donc :

La différentielle de f: $df = dy = f'(x)dx$

Théorème

Pour qu'une fonction soit différentiable en un point x, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée finie en ce point.

3.3 Règle de l'Hôpital pour lever les indéterminations

On cherche $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ Si

1) l'indétermination est du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
2) $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables au voisinage du point a
3) $g(x) \neq 0$ *et* $g'(x) \neq 0$ au voisinage de a
4) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe*

Alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Remarque 1

Si le rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ présente encore l'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ en a

Et les conditions de la règle de l'Hôpital sont satisfaites, alors on passe aux rapports des dérivées secondes, ….etc.

Remarque 2 : Cette règle est valable pour le cas $a = \infty$

En effet :

On pose $X = \frac{1}{x}$, si $x \to \infty \Longrightarrow X \to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{X\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{X}\right)}{g\left(\frac{1}{X}\right)}=\lim_{X\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{X}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{X}\right)\right)'}=\lim_{X\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{X}\right)\left(-\frac{1}{X^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{X}\right)\left(-\frac{1}{X^2}\right)}=\lim_{X\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{X}\right)}{g'\left(\frac{1}{X}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.5 Exercices d'application

1) Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$?

2) On définit la fonction $f(x)$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{Ln(1+x)} & si\ x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[\\ 0 & si\ x = 0\end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f et donner $f'(x)$?

Réponse :

1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - sin^2 x}{x^2 sin^2 x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - sin^2 x}{x^4}\right)$

$$\left(\frac{x^2 - sin^2 x}{x^2 sin^2 x} \sim \frac{x^2 - sin^2 x}{x^4} \quad car \ \ sinx \sim x \ \ au\ \mathcal{V}(0)\right)$$

En appliquant la règle de l'hôpital, on a :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - sin^2 x}{x^4}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2x - 2sinxcosx}{4x^3}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2x - sin(2x)}{4x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2 - 2cos(2x)}{12x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{4sin(2x)}{24x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{8cos(2x)}{24}\right) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}}$$

2) Dérivabilité de f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{Ln(1+x)} & si\ x \in]-1,0[\cup]0, +\infty[\\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

- Domaine de définition de f: $D_f =]-1, +\infty[$
- Dérivabilité pour $x \in]-1,0[\cup]0, +\infty[$ $(x \neq 0)$

$$f(x) = \frac{x^2}{Ln(1+x)}$$

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (x^2 et $ln(1+x)$)

$$f'(x) = \frac{(x^2)'.ln(1+x) - x^2.(ln(1+x))'}{(ln(1+x))^2} = \frac{2xln(1+x) - x^2.\frac{1}{1+x}}{(ln(1+x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(1+x)ln(1+x) - x^2}{(1+x)(ln(1+x))^2}$$

- Dérivabilité au point $x = 0$, $f(0) = 0$
  En appliquant la définition de dérivée

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{x^2}{Ln(1+x)}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{ln(1+x)}$$

a) Soit en appliquant la règle de l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{ln(1+x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{(x)'}{\left(ln(1+x)\right)'} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1$$

b) Soit directement on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{ln(1+x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{\frac{ln(1+x)}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{\frac{ln(1+x)-ln(1+0)}{x-0}}$$

$$= \frac{1}{\left(ln(1+x)\right)'_{x=0}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0}} = 1$$

On a $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 = f'(0)$

Donc f est dérivable au point 0

En conclusion f est dérivable sur tout son domaine de définition

Sa fonction dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(1+x)ln(1+x)-x^2}{(1+x)\left(ln(1+x)\right)^2} & si\ x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Attention : Si on demande l'étude de la dérivabilité de f sans préciser les points, on doit le faire sur tout son domaine de définition.