Chapitre 2

Résolution des Systèmes Linéaires Ax=b, Méthodes Directes (Suite)

II. La factorisation L.U

II.1 Principe de la factorisation (décomposition)

La matrice des coefficients A est factorisée sous la forme d'un produit de deux matrices A = L.U (où L : désigne une matrice triangulaire inférieure (Lower) et U : une matrice triangulaire supérieure (Upper)).

Le système de Cramer Ax = b devient alors : (L.U).x = b.

Posons U.x = y ② , ce qui donne L.y = b ①.

On peut résoudre facilement le premier système triangulaire pour trouver le vecteur y. Ce dernier sert de second membre pour le deuxième système triangulaire supérieur et dont la résolution permet d'obtenir la solution x.

Théorème1

Si A est inversible et factorisable en un produit L.U, alors cette décomposition est unique.

Théorème2

Soit A une matrice inversible. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit décomposable en un produit L.U est que tous ses mineurs fondamentaux soient différents de zéro.

II.2 Algorithme de factorisation A = L.U (Version de DOOLITTLE)

Afin de déterminer les éléments l_{ij} ($\forall$ i > j) de la matrice L et les éléments u_{ij} ($\forall$ i ≤ j) de la matrice U, on peut utiliser la version suivante de l'algorithme de factorisation :

$$l_{ii} = 1 \qquad \forall i$$

$$l_{ij} = [\, a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \,] \,/\, u_{jj}, \qquad \forall\ i > j$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}, \qquad \forall\ i \le j$$

II.3 Algorithme de factorisation A = L.U (Version de CROUT)

Une autre version de la factorisation A=L.U est donnée par l'algorithme suivant :

$$u_{ii} = 1 \qquad \forall i$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}, \qquad \forall\, i \geq j$$

$$u_{ij} = [\, a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}] / l_{ii}, \quad \forall\, i<j$$

II.4 Calcul du déterminant

Det (A)= Det (L.U) = Det (L).Det (U)

II.5 Complexité de l'algorithme

La méthode de factorisation nécessite un nombre total d'opérations élémentaires (+, -, * et /) à peu prés égal à $n^3/3$, soit une complexité de **O ($n^3/3$)** quand n devient grand.

Exercice Résolu

- Résoudre le système linéaire suivant par la méthode de CROUT :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 17x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

- Evaluer le déterminant de A.

- Sous quelles conditions, A est-elle décomposable en A=LU.

- Montrer que cette décomposition est unique.

Solution

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -11 & 0 \\ -2 & 19 & -3/11 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Det (L) = 6, Det (U) = 1

- Det (A) = Det (L) . Det (U) = 6

- Le vecteur Solution y est donné par : $y^t = (1,\ 2,\ -59/9)$

- Le vecteur Solution x est donné par : $x^t = (-37/36,\ 19/180, 59/20)$

Les conditions de décomposition

A est décomposable en A=LU si tous les mineurs fondamentaux de A sont non nuls.

L'unicité de la décomposition

- Raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe deux décompositions

$A=L_1U_1$ ① (L_1 : une matrice triangulaire inférieure et U_1 : une matrice triangulaire supérieure)

$A=L_2U_2$ ②(L_2 : une matrice triangulaire inférieure et U_2 : une matrice triangulaire supérieure)

① = ② $\Leftrightarrow L_1U_1 = L_2U_2$
$\Leftrightarrow L_1^{-1} L_1U_1 = L_1^{-1} L_2U_2$; (On multiplie à gauche les deux membres par L_1^{-1})
$\Leftrightarrow U_1 = L_1^{-1} L_2U_2$
$\Leftrightarrow U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2U_2 U_2^{-1}$; (On multiplie à droite les deux membres par U_2^{-1})
$\Leftrightarrow U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$ ③

- Rappels des propriétés des matrices :

1. L'inverse d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure).

2. Le produit deux matrices triangulaires (supérieure ou inférieure) est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure).

L'équation ③ ne peut être vérifiée que si :

$U_1 U_2^{-1} = I$ (I : désigne la matrice identité) et

$L_1^{-1} L_2 = I$

D'où $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$ et les deux décompositions sont les mêmes

Par suite la décomposition est unique.

Exercice Non Résolu

En utilisant la méthode directe de DOOLITTLE (Factorisation LU), calculer le déterminant du système suivant ainsi que la matrice A^{-1} associée :

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 5x_2 + 1/2\, x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$$