UNIVERSITE ORAN 1
GENIE BIOMEDICAL 2020-2021

COURS 3

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES ET HYPERBOLIQUES ET EXERCICES D'APPLICATIONS

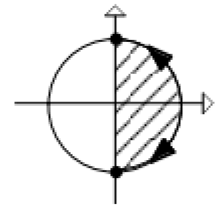
L.MÉBARKI

L

Fonctions Trigonométriques et leurs réciproques

1) Fonction Arcsinus

$sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante alors elle admet une fonction réciproque ou inverse notée $Arcsin$

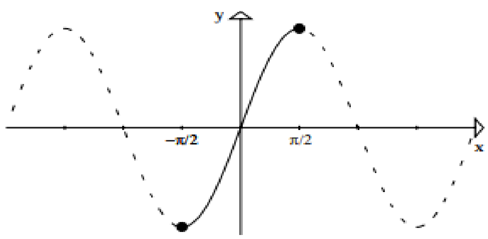


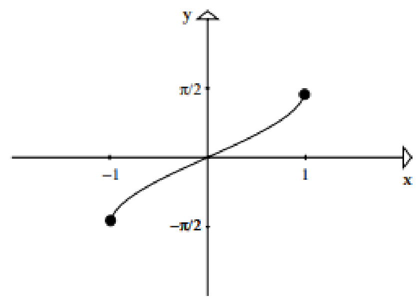
Arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ continue et strictement croissante

$$\boxed{y = Arcsinx \Leftrightarrow x = siny \;\; et \;\; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}}$$

Arcsinx est dérivable sur $]-1,1[$ $\boxed{(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

y = sin x, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

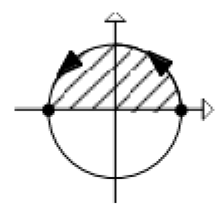




Arc Sin

2) Fonction Arccosinus

Cos : $[0, \pi] \to [-1,1]$ est continue et strictement décroissante alors elle admet une fonction réciproque notée Arccos

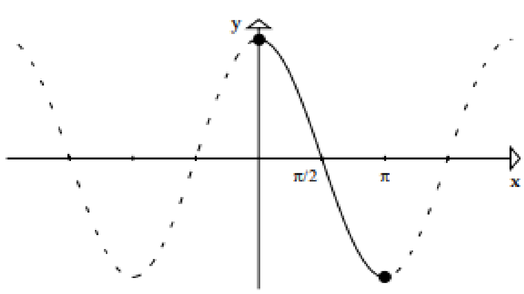


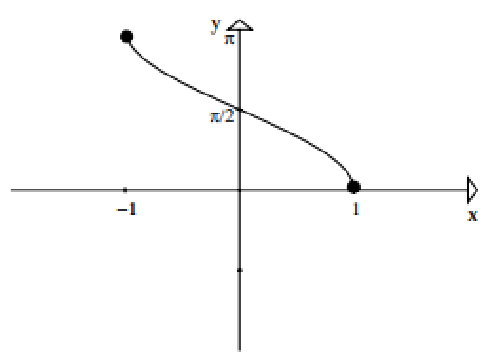
Arccos : $[-1,1] \to [0, \pi]$ continue et strictement décroissante

$$\boxed{y = Arccosx \Leftrightarrow x = cosy \;\; et \; 0 \le y \le \pi}$$

Arccosx est dérivable sur $]-1,1[$ $\boxed{(Arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

y = cos x, $0 \le x \le \pi$.



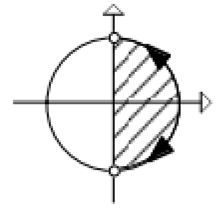


Arc Cos

3)Fonction Arctangente

tg : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante sa fonction inverse est notée $Arctg$

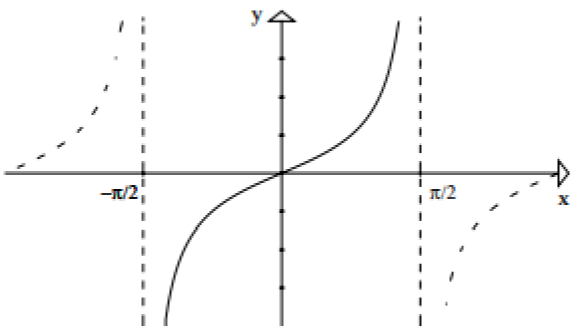
$Arctg : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ continue et strictement croissante.

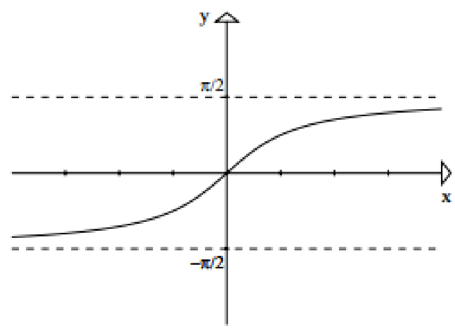


$$\boxed{y = Arctgx \Leftrightarrow x = tgy \ \ et \ \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

$Arctgx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\boxed{(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}$

y = tg x, -π/2 < x < π/2 .



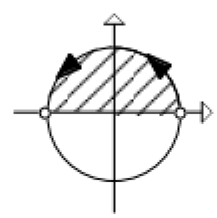


Arc Tg

4)Fonction Arccotangente

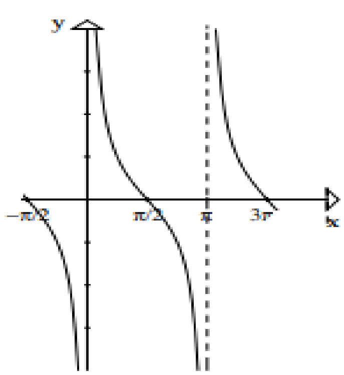
Cotg : $]0,\pi[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement décroissante sa fonction inverse est notée $Arccotg$

$Arccotg$: $\mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$ continue et strictement décroissante.

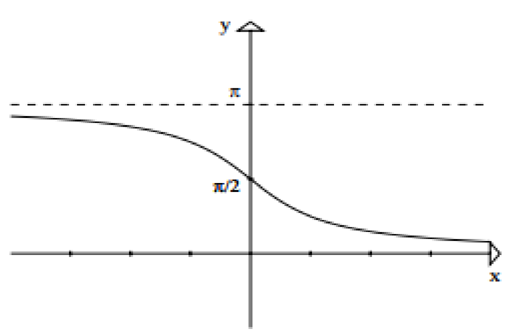


$$\boxed{y = Arccotgx \Leftrightarrow x = cotgx \ \text{ et } \ 0< y < \pi}$$

$Arccotgx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\boxed{(Arccotgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$



cotg x



Arc Cotg

Les fonctions hyperboliques et leurs inverses

On définit les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente hyperboliques par :

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $thx = \frac{shx}{chx}$, (et pour $x \neq 0$) $cothx = \frac{chx}{shx}$.

On a la relation : $\boxed{ch^2x - sh^2x = 1}$

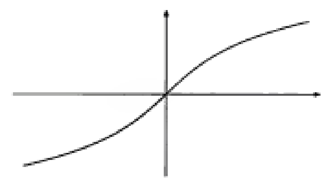
1) La fonction sh et son inverse $Argsh$

$Sh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, $(shx)' = chx$

$Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante

$\boxed{y = Argshx \Leftrightarrow x = shy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}}$

$\boxed{(Argshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$



La fonction argsh

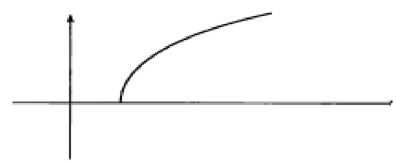
2) La fonction ch et son inverse $Argch$

$ch: [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ continue et strictement croissante, $(chx)' = shx$

$Argch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue et strictement croissante

$\boxed{y = Argchx \Leftrightarrow x = chy, x \geq 1, y \geq 0}$

$\boxed{(Argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}}$



La fonction argch

3) La fonction th et son inverse $Argth$

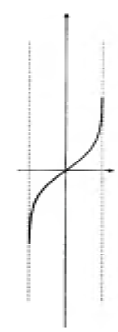
$th:]-\infty, +\infty[\to]-1,1[$ continue et strictement croissante, $(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$

$Argth :]-1,1[\to]-\infty, +\infty[$ continue et strictement croissante

$\boxed{y = Argthx \Leftrightarrow x = thy, -1 < x < 1, y \in \mathbb{R}}$

et

$\boxed{(Argthx)' = \frac{1}{1-x^2}}$



La fonction argth

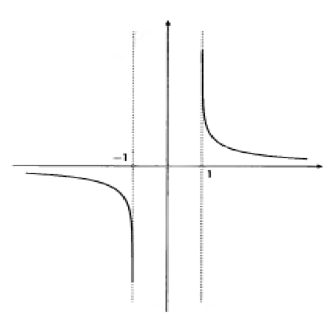
4) La fonction $coth$ et son inverse $Argcoth$

$coth: \mathbb{R}^* \to]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ continue et strictement décroissante, $(cothx)' = -\frac{1}{sh^2x}$

$Argth :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ continue et strictement décroissante

$\boxed{y = Argcothx \Leftrightarrow x = cothy, x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, y \in \mathbb{R}^*}$

et $\boxed{(Argcothx)' = \frac{1}{1-x^2}}$



La fonction argcoth

Exercices d'application

1) Calculer : $Arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $Arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $Arcsin\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2) Montrer que : $Argsh(x)=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3) Montrer que : $Arccos(x) > \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in]-1,1[$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $chx + 2shx = 2$

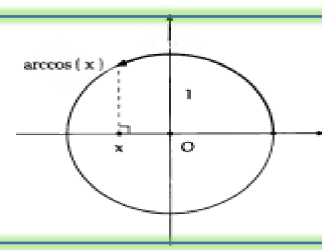
5) Montrer que : $Argth\left(\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}\right)=\frac{|x|}{2}$

6) Calculer les dérivées suivantes : $y = \left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$, $y = ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)$, $y = x^{\frac{1}{x}}$, $y = sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)$, $y = Arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$, $y = Arccos(lnx)$.

Solutions

1)

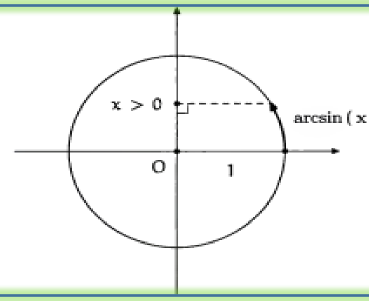
Rappel 1 :
$Arccosx,\ x \in [-1,1]$ est l'unique point $y \in [0,\pi]$ tel que $cosy = x$

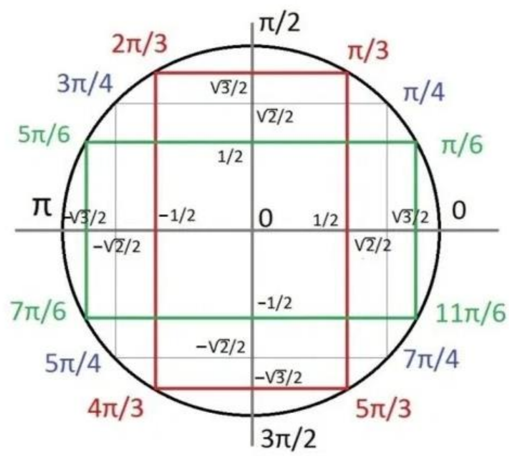


Rappel 2 :

$Arcsinx,\ x \in [-1,1]$ est l'unique point $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$tel\ que\ siny = x$





- Calculons $Arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $Arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$
  1. $Arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y \in [0, \pi]$ Tel que

     $cosy = \frac{\sqrt{3}}{2}$

     Directement sur le cercle $y = \frac{\pi}{6}$.

  2. $Arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Tel que

     $siny = -\frac{1}{2}$

     Sur le cercle $y = \frac{11\pi}{6}$ =$-\frac{\pi}{6}$.

- Calculons $Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $Arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $Arcsin\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Arcsin(sin(x)) = x\ si\ et\ seulement\ si\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, Arccos(cos(x)) = x\ si\ et\ seulement\ si\ 0 \leq x \leq \pi$$

a) $Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = Arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (la fonction cosinus est paire) donc $\boxed{Arccos\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \in [0,\pi]}$.

b) $Arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$, $car\ \frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ mais

$Arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = Arcsin\left(sin\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $(sin(\alpha) = sin(\pi-\alpha))$

$= Arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\boxed{Arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}}$.

c) $Arcsin\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = Arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{Arcsin\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}}$.

---

2) Montrons que : $Argsh(x) = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Posons $y = Argsh(x) \Leftrightarrow x = shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y}$

$\Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - 2xX - 1 = 0$ avec $X = e^y$

Calculons Δ, $\Delta = 4x^2+4$, l'équation admet alors deux solutions

$X_1 = x+\sqrt{x^2+1}$ et $X_2 = x-\sqrt{x^2+1}$ mais $X_2 < 0$ donc $X_2 \neq e^y$

La solution est alors :

$$\boxed{e^y = x+\sqrt{x^2+1} \Longrightarrow y = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).}$$

---

3) Montrons que : $Arccos(x) > \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in]-1,1[$

Pour cela il suffit de montrer que : $Arccos(x) - \sqrt{1-x^2} > 0$

Etudions la fonction : $f(x) = Arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

a) $D_f = [-1,1]$

b) $f(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \ \ \forall x \in \,]-1,1[$

c) $f(1) = Arccos(1) = 0$ et $f(-1) = Arccos(-1) = \pi$

d) Tableau de variation :

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	π	$\searrow$	0

$f(x)$ est décroissante de π à 0 donc $Arccos(x) - \sqrt{1-x^2} > 0.$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $chx + 2shx = 2$

$\Leftrightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} + 2\frac{e^x-e^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow 3e^x - e^{-x} = 4 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 1 = 4e^x$

On a alors à résoudre l'équation : $3e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$

En posant $X = e^x$ on a : $3X^2 - 4X - 1$

$\Delta = 28$ l'équation admet alors deux solutions :

$X_1 = \frac{4-2\sqrt{7}}{6}$, $X_2 = \frac{4+2\sqrt{7}}{6}$ mais $X_1 < 0$ donc la solution de l'équation est :

$e^x = \frac{4+2\sqrt{7}}{6} \Longrightarrow \boxed{x = ln\left(\frac{4+2\sqrt{7}}{6}\right).}$

5) Montrons que : $Argth\left(\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}\right) = \frac{|x|}{2}$

$$Argth\left(\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}}\right)=Argth\left(\sqrt{\frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x+e^{-x}+2}}\right)=Argth\left(\sqrt{\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}\right)$$

$$= Argth\left(\sqrt{\frac{sh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{ch^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)= Argth\left(\sqrt{\left(\frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{ch\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}\right)= Argth\left(\sqrt{\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\right)$$

$$=Argth\left(\left|th\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)=\left|\frac{x}{2}\right|.$$

---

6) Calcule de dérivées

- $$y' = \left(\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\right)' = 2\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$=2\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=2\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{\left(\left(Arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\right)' = -\frac{2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\ Arcsin\left(\frac{1}{x}\right).}$$

- $$y' = \left(ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}}\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}}\left(\left(\frac{1+sinx}{1-sinx}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1+sinx}{1-sinx}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{1+sinx}{1-sinx}\right)'\right)=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}}\left(\frac{1+sinx}{1-sinx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{cosx(1-sinx)-(-cosx)(1+sinx)}{(1-sinx)^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{(1-sinx)}{(1+sinx)}\left(\frac{2cosx}{(1-sinx)^2}\right)$$

$$= \frac{cosx}{(1+sinx)(1-sinx)}=\frac{cosx}{1-sin^2x}=\frac{cosx}{cos^2x} = \frac{1}{cosx}.$$

$$\boxed{\left(ln\left(\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}\right)\right)' = \frac{1}{cosx}}$$

- $y' = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)'$ on utilise $\boxed{a^x = e^{xlna}}$

  $y' = \left(e^{\frac{1}{x}lnx}\right)' = e^{\frac{1}{x}lnx}\left(\frac{lnx}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}lnx}\left(\frac{\frac{1}{x}.x-lnx}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-lnx}{x^2}\right).$

  $$\boxed{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-lnx}{x^2}\right)}$$

- $y' = \left(sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)\right)' = \cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)\left(\sqrt{1-2^x}\right)' =$

  $= \cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)\left((1-2^x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)\left(\frac{1}{2}(1-2^x)^{-\frac{1}{2}}(1-2^x)'\right)$

  $= \cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)\left(\frac{1}{2}(1-2^x)^{-\frac{1}{2}}(-(2^x)')\right) =$

  $= \cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)\left(\frac{1}{2}(1-2^x)^{-\frac{1}{2}}(-(e^{xln2})')\right) = \frac{\cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)}{2\sqrt{1-2^x}}(-ln2e^{xln2})$

  $$\boxed{\left(sin\left(\sqrt{1-2^x}\right)\right)' = \frac{\cos\left(\sqrt{1-2^x}\right)}{2\sqrt{1-2^x}}(-2^x ln2).}$$

- $y' = \left(Arctg\,\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\left(\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}\right) =$

  $$\boxed{\left(Arctg\,\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}.}$$

- $y' = (Arccos(lnx))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(lnx)' == -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) =$

  $$\boxed{(Arccos(lnx))' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}}$$