Le mouvement relatif

I/ Introduction :

Le repos et le mouvement sont deux notions relatives, ils dépendent de la situation du mobile par rapport au repère qui sert comme référence.

La position, la vitesse et l'accélération d'un même mobile ne sont pas donc les mêmes dans deux repères différents.

II/Changement de référentiels :

Soit le mouvement d'un point matériel M par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer le mouvement de M par rapport à un autre référentiel.

II/1/Mouvement du repère relatif par rapport au repère absolu :

Le 1er référentiel R(O,xyz) définit par les vecteurs unitaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est considéré fixe et nous l'appelons repère absolu. Dans R on défini :

- ✓ Le vecteur position absolue : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}}$
- ✓ Le vecteur vitesse absolue : $\overrightarrow{\boldsymbol{v_a}} = \left.\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$
- ✓ Le vecteur accélération absolue : $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_a}} = \left.\frac{\boldsymbol{d^2}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt^2}}\right|_{\boldsymbol{R}} = \left.\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{v_a}}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \ddot{\boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \ddot{\boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}$

Le 2ème référentiel R$'$(O$'$, x'y'z') définit par les vecteurs unitaires $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ est en mouvement par rappoert à R donc nous l'appelons repère relatif. Dans R$'$ on défini :

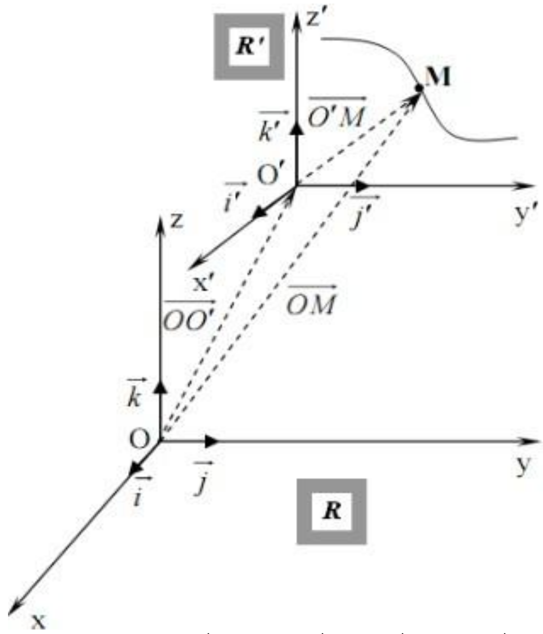
- ✓ Le vecteur position relative : $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = \boldsymbol{x'}\overrightarrow{\boldsymbol{\imath'}} + \boldsymbol{y'}\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath'}} + \boldsymbol{z'}\overrightarrow{\boldsymbol{k'}}$
- ✓ Le vecteur vitesse relative : $\overrightarrow{\boldsymbol{v_r}} = \left.\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\boldsymbol{R'}} = \dot{\boldsymbol{x}}'\overrightarrow{\boldsymbol{\imath'}} + \dot{\boldsymbol{y}}'\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath'}} + \dot{\boldsymbol{z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{k'}}$
- ✓ Le vecteur accélération relative : $\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma_r}} = \left.\frac{\boldsymbol{d^2}\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}{\boldsymbol{dt^2}}\right|_{\boldsymbol{R'}} = \left.\frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{v_r}}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{\boldsymbol{R'}} = \ddot{\boldsymbol{x}}'\overrightarrow{\boldsymbol{\imath'}} + \ddot{\boldsymbol{y}}'\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath'}} + \ddot{\boldsymbol{z}}'\overrightarrow{\boldsymbol{k'}}$

Par définition :

- Le mouvement du point M par rapport à « R » s'appelle mouvement absolu.
- Le mouvement du point M par rapport à « R$'$ » s'appelle mouvement relatif.
- Le mouvement de « R$'$ » par rapport à « R » s'appelle mouvement d'entrainement.

Relation entre les positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$



$$\Rightarrow \quad x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}$$

II/2/ Mouvement de translation :

a/ Loi de composition des vitesses :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}$$

$$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \dot{x}'\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}'\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \quad \textbf{où} \quad \vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{R'/R} + \vec{v}_{M/R'}$$

$\overrightarrow{v_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R$ est la vitesse de « R' » par rapport à « R » que nous appelons vitesse d'entrainement. Ou bien la vitesse de O' dans R.

b/ Loi de composition des accélérations :

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{R'} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\right|_{R'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_r} \quad \textbf{ou} \quad \vec{\gamma}_{M/R} = \vec{\gamma}_{R'/R} + \vec{\gamma}_{M/R'}$$

$\overrightarrow{\gamma_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R$ est l'accélération de « R' » par rapport à « R » que nous appelons accélération d'entrainement. Ou bien l'accélération de O' dans R.

Cas particulier :

- Si M est fixé dans R' : $\overrightarrow{v_r} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e}$
- Si R' est fixé par rapport à R : $\overrightarrow{v_e} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$
- Si le mouvement de translation de « R' » par rapport à « R » est uniforme (R' est un repère de Gallilé) : $\overrightarrow{v_e} = \boldsymbol{constante} \Rightarrow \overrightarrow{\gamma_e} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r}$ donc les accélérations mesurées dans les deux repères sont les mêmes.

II/3/ Mouvement de rotation :

Si $\vec{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation des axes Ox' et Oy' par rapport à l'axe fixe Oz, alors:

$$\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k} \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{k} = \vec{0} \;\; ; \qquad \vec{k} \equiv \vec{k'}$$

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i'} = \Omega\vec{k} \wedge \vec{i'} = \Omega\vec{j'} \quad ; \qquad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j'} = \Omega\vec{k} \wedge \vec{j'} = -\Omega\vec{i'} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k'} = \vec{0}$$

La rotation est dite uniforme si la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{k}$ est un vecteur constant.

a/ Loi de composition des vitesses :

La vitesse du point M est obtenue en dérivant la relation vectorielle $\overrightarrow{OM}$ dans le repère absolu:

$$\vec{v}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re}}_{\vec{v}_a(O'/O)} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|$$

Il faut également dériver les vecteurs unitaires car ils tournent par rapport au système inertiel qui est en fonction du temps.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\Re}}_{\vec{v}_a(O'/O)} + \left.\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)\right|_{\Re} + \left.\left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right|$$

$$\left(\frac{di'}{dt} \neq \vec{0}\,, \frac{d\vec{j'}}{dt} \neq \vec{0}\,, \frac{d\vec{k'}}{dt} \neq \vec{0}\,\right)$$

$\vec{v}_r = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$ est la vitesse relative du point M par rapport au repère relatif .

$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ est appelée la vitesse d'entraînement du repère relatif par rapport au repère absolu.

Comme : $\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}'$ **;** $\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}'$ et $\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}'$

Alors :

$$\overrightarrow{v_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

b/Loi de composition des accélérations :

En procédant au calcul de la dérivée de la vitesse absolue par rapport au repère absolu, l'accélération absolue est obtenue. Le problème est d'exprimer l'un par rapport à l'autre les quantités $\vec{\gamma}_r$ et $\vec{\gamma}_a$, respectivement accélération relative et accélération absolue.

L'accélération absolue est donnée par :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\Re} = \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re}}_{\vec{a}_a(O')} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{\Re}$$

$$\vec{\gamma}_a = \left.\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)\right|_{\Re} + \left.\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right)\right|_{\Re} +$$
$$2\left.\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\right|_{\Re}$$

L'accélération absolue s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{O'M} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\gamma}_r$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_c}}$$

Dans cette formule, l'accélération absolue est donnée par trois contributions :

•L'accélération relative :

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{\Re'}$$

•L’accélération de Coriolis:

$$\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

•L’accélération d’entraînement:

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

Remarques :

- Si le repère relatif est en mouvement de translation quelconque par rapport au repère absolu, $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ sont constants, $\vec{\Omega} = \vec{0}$**,** alors :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_{\Re} + \vec{\gamma}_r$$

- Si le repère relatif est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère absolu, l’accélération absolue est :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r$$

$\vec{v}_r = \vec{0}$ si M est immobile dans le repère relatif.

Application :

Soit un point matériel M se déplaçant dans le repère (o`x`y`) qui tourne avec une vitesse angulaire Ω autour de l’axe (oz) du repère (o x y z). Le point M se déplace en mouvement uniforme avec une vitesse $V_0$ dans la direction (o`x`). La distance oo`= a.

1/ Calculez dans le plan (o`x`y`) toutes les vitesses et les accélérations.

2/ En déduire la vitesse et l’accélération absolues dans le repère (o x y z).

Solution :

1/ Calcul de toutes les vitesses et les accélérations dans le plan (o`x`y`) :

$\overrightarrow{O'M} = V_0 t\,\vec{\imath}'$, $\quad\overrightarrow{OO'} = a\,\vec{\imath}'$, $\quad\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = V_0\,\vec{\imath}'$$

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_e = \Omega(a + V_0 t)\vec{\jmath}'$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = V_0\ \overrightarrow{i'} + \Omega(a + V_0 t\ )\overrightarrow{j'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}\bigg|_{R'} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\bigg|_{\Re} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\bigg|_{\Re}\wedge\overrightarrow{O'M}\ , \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = -\Omega^2(a + V_0 t\ )\overrightarrow{i'}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\ \vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = 2\Omega V_0\overrightarrow{j'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_c} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\gamma_a} = -\Omega^2(a + V_0 t\ )\overrightarrow{i'} + 2\Omega V_0\overrightarrow{j'}$$

2/ la vitesse et l'accélération absolues dans le repère (o x y z) :

La projection de $\overrightarrow{i'}$ et $\overrightarrow{j'}$ sur (o x y) donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{i'} = cos\ \Omega t\ \vec{i} + sin\Omega t\ \vec{j} \\ \overrightarrow{j'} = -sin\Omega t\ \vec{i} + cos\ \Omega t\ \vec{j} \end{cases}$$

En remplaçant dans les expressions de $\overrightarrow{v_a}$ et $\overrightarrow{\gamma_a}$ on obtient :

$$\overrightarrow{v_a} = [V_0\ cos\ \Omega t - \Omega(a + V_0 t\ )sin\Omega t]\ \vec{i} + [V_0\ sin\ \Omega t + \Omega(a + V_0 t\ )\cos\ \Omega t]\ \vec{j}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = [-\Omega^2(a + V_0 t\ )cos\ \Omega t - 2\Omega V_0 sin\Omega t]\ \vec{i} + [-\Omega^2(a + V_0 t\ )sin\ \Omega t + 2\Omega V_0 \cos\Omega t]\ \vec{j}$$