2020-2021

Université Oran 1

L1 Génie Biomédical

DEVELOPPEMENTS LIMITES
APPLICATIONS ET REVISION GENERALE

L.MÉBARKI

Développements limités

1. Formule de Taylor-Young (pour $x_0 = 0$)

Si f est dérivable et continue jusqu'à n au voisinage de 0 $\Longrightarrow$ f admet un développement limité au point 0 à l'ordre n donné par la formule :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots .. \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Avec $o(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

2. Développement limité des fonctions usuelles au voisinage de 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$Arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \ldots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \ldots \ldots \ldots .. + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \ldots \ldots .. + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \ldots \ldots .. + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

3. Les applications des développements limités

3.1 Calcul de limites

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Arcsinx-x}{x^3}$

Lorsque $x \to 0$, $\frac{Arcsinx-x}{x^3}$ présente une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

Utilisons le développement limité à l'ordre 3 de $Arcsinx$

Pour calculer ce développement limité on utilise les propriétés du DL:

$$(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+X)^{\alpha}$$

On applique $\bigstar$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $X = -x^2$

$$(1+X)^{\alpha} = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2 + o(X^2)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}(-x^2)^2 + o((-x^2)^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

Ainsi pour trouver notre DL il suffit de passer à la primitive :

$$Arcsinx = Arcsin0 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

Comme $Arcsin0 = 0$, et on a besoin du DL d'ordre 3 :

$$Arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Remarque : Il est important de retenir les méthodes de calcule des DL , et non pas les résultats.

On a alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{Arcsinx-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{6}+\varepsilon(x)\right)}{x^3} = \frac{1}{6}}$

3.2 **Equation de la tangente à une courbe et sa position**

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point x_0 $\Longrightarrow$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots \ldots\ldots a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Alors la courbe de f admet une tangente au point x_0 d'équation

$$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

La position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de x_0 dépend du signe $f(x) - y$ et donc dépend de $a_k(x - x_0)^k$ avec k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$.

Exemple : équation de la tangente au point 0, de la fonction

$$f(x) = ln(1 + x)$$

En utilisant le DL de $ln(1 + x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Directement :

$y = x$ est l'équation de la tangente à C_f au point $(0,0)$

Et la position est donnée par $f(x) - y = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

La position dépend du signe de $-\frac{x^2}{2} \Longrightarrow f(x) - y < 0 \Longrightarrow$ la courbe de f est au dessous de la tangente.

3.3 Branches infinies

Dans l'étude des courbes $y = f(x)$, si la courbe $(\mathcal{C})$ de y admet une asymptote oblique (D): $y = ax + b$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \text{ et } \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$$

En utilisant les DL, on peut trouver l'équation (D): $y = ax + b$

Equation et position de l'asymptote oblique

1. On détermine le DL au voisinage de $+\infty (ou - \infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$

   Pour cela il suffit de poser $X = \frac{1}{x}$ et faire le DL en 0

2. $\frac{f(x)}{x} = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots \ldots \ldots \ldots . a_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ alors

   $f(x) = a_0 x + a_1 + \cdots \ldots \ldots . . a_n \frac{1}{x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

3. $y = a_0 x + a_1$ est une asymptote à la courbe en $+\infty (ou - \infty)$

4. La position de la courbe relativement à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$ donc par le signe de $a_k \frac{1}{x^k}$ $(a_k \neq 0)$

Remarque : le DL au voisinage de ∞ est appelé DL asymptotique.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{1+x}$

1. Déterminons le DL en + ∞ de $\frac{f(x)}{x}$ (de même pour -∞)

   $\frac{f(x)}{x} = \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{1+x}$, posons $X = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{X}$ $(x \in \mathcal{V}(+\infty) \Longrightarrow X \in \mathcal{V}(0))$

   $\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{X} e^X}{1+\frac{1}{X}} = \frac{e^X}{X+1} = e^X . \frac{1}{1+X}$

   $= (1 + X + \frac{X^2}{2\,!} + \frac{X^3}{3\,!} + o(X^3))(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3))$

   $= 1 + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

2. En revenant à $la\ variable\ x$

   $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \Longrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. $y = x$ est l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f en +∞ et en - ∞.

4. la position est donnée par le signe de $f(x) - y$ donc par $\frac{1}{2x}$

   on a alors $f(x) - y > 0$ $si\ x \in \mathcal{V}(+\infty) \Longrightarrow (C_f)$ est au dessus de l'asymptote.

$f(x) - y < 0 \;\; si\; x \in \; \mathcal{V}(-\infty) \Longrightarrow (C_f)$ est au dessous de l'asymptote.

4 Exercices d'applications

1) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{sinx+3cosx}{1-x}, \; f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2) Donner le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 4 de

$f(x) = \frac{lnx}{x^2}$

3) En utilisant les développements limités calculer la limite suivante :

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx)-ln(1+x)}{x^2}$

Solutions

a) $f(x) = \frac{sinx+3cosx}{1-x} = (sinx + 3cosx).\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Les DL d'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions $sinx, cosx\; et\; \frac{1}{1-x}$ sont :

$sinx = \;\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}} \boldsymbol{+}\, o(x^4)$

$\mathrm{cosx} = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{2!}} + \frac{\boldsymbol{x^4}}{\boldsymbol{4!}} \boldsymbol{+}\; o(x^4)$

$\frac{1}{1-x}$=1+$x + x^2 + x^3 + x^4 + \; o(x^4)$

Alors on a :

$sinx + 3cosx$ =3 + $x - \frac{\boldsymbol{3x^2}}{\boldsymbol{2!}} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}} \boldsymbol{+} \frac{\boldsymbol{3x^4}}{\boldsymbol{4!}} \boldsymbol{+}\; o(x^4)$

$$\frac{sinx+3cosx}{1-x} = \left(3+x-\frac{\mathbf{3x^2}}{\mathbf{2!}} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\mathbf{3x^4}}{\mathbf{4!}}\right)(1+x+x^2+x^3+x^4)+o(x^4)$$

$$\boxed{\frac{sinx+3cosx}{1-x} = 3+4x+\frac{5}{2}x^2+\frac{14}{6}x^3+\frac{59}{24}x^4+o(x^4)}$$

Remarque : On peut aussi utiliser la méthode du quotient pour obtenir ce DL . On divise la partie régulière (polynôme) de $sinx+3cosx$ par $1-x$ suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{l|l}
3+x-\frac{\mathbf{3x^2}}{\mathbf{2!}} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\mathbf{3x^4}}{\mathbf{4!}} & 1-x \\
\quad -3+3x & \overline{3+4x+\frac{5}{2}x^2+\frac{14}{6}x^3+\frac{59}{24}x^4} \\
\hline
4x-\frac{\mathbf{3x^2}}{\mathbf{2!}} - \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\mathbf{3x^4}}{\mathbf{4!}} & \\
-4x+4x^2 & \\
\hline
\frac{5}{2}x^2-\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\mathbf{3x^4}}{\mathbf{4!}} & \\
-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3 & \\
\hline
\frac{14}{6}x^3+\frac{\mathbf{3x^4}}{\mathbf{4!}} & \\
-\ \frac{14}{6}x^3+\frac{14}{6}x^4 & \\
\hline
\quad +\frac{59}{24}x^4 &
\end{array}$$

$b)\ f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln(1+x) - ln(1-x)$

Trouvons les DL d'ordre 4 au voisinage de 0 de $ln(1+x)$ et $ln(1-x)$

$$\left(ln(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$$

on passe à la primitive ($ln(1+0) = ln1 = 0$)

$$ln(1+x) = ln(1+0)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$\boxed{ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}$$

$$\left(ln(1-x)\right)' = \frac{-1}{1-x} = -\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)$$

On a alors :

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

On obtient :

$$\boxed{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)}$$

2) Donnons le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 4 de

$$f(x) = \frac{lnx}{x^2}$$

On revient à 0 par le changement de variable $X = x - 1 \Longrightarrow x = X + 1$

$$x \in \mathcal{V}(1) \Longrightarrow X \in \mathcal{V}(0)$$

$$f(X) = \frac{ln(X+1)}{(X+1)^2} = \big(ln(1+X)\big).(1+X)^{-2}$$

$$ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$$

$$(1+X)^{-2} = 1 + (-2)X + (-2)(-2-1)\frac{X^2}{2!} + (-2)(-2-1)(-2-2)\frac{X^3}{3!} + $$
$$+(-2)(-2-1)(-2-2)(-2-3)\frac{X^4}{4!} + o(X^4)$$

(On utilise ★ avec $\alpha = -2$)

$$(1+X)^{-2} = 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3 + 5X^4 + o(X^4)$$

$$\big(ln(1+X)\big).(1+X)^{-2} =$$

$$= (X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)).(1 - 2X + 3X^2 - 4X^3 + 5X^4 + o(X^4) =$$

$$= X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{13}{3}X^3 - \frac{77}{12}X^4 + o(X^4)$$

Revenons à $X = x - 1$, le DL de $f(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 1 est :

$$\boxed{f(x) = \frac{lnx}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + o((x-1)^4)}$$

L.Mébarki

Remarque : On utiliser le quotient des DL

$$f(X) = \frac{ln(X+1)}{(X+1)^2}$$

On divise la parie régulière du DL de $ln(X+1)$ par $(X+1)^2 = 1 + 2X + X^2$

$$\begin{array}{l|l}
X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} & 1 + 2X + X^2 \\
\cline{2-2}
\underline{-X - 2X^2 - X^3} & X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{13}{3}X^3 \; - \frac{77}{12}X^4 \\
-\frac{5}{2}X^2 - \frac{2}{3}X^3 - \frac{X^4}{4} & \\
\underline{+\frac{5}{2}X^2 + 5X^3 + \frac{5}{2}X^4} & \\
\frac{13}{3}X^3 + \frac{9}{4}X^4 & \\
\underline{-\frac{13}{3}X^3 - \frac{26}{3}X^4} & \\
-\frac{77}{12}X^4 &
\end{array}$$

3 En utilisant les développements limités calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+sinx) - ln(1+x)}{x^2}$$

Cette limite présente une indétermination du type $\frac{0}{0}$

On donne les DL d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions :$sinx, ln(1+x)$ et $ln(1+sinx)$

$$sinx = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}} + o_1(x^3)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_2(x^3)$$

$$ln(1+sinx) = ln\left(1 + \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}} + \; o_1(x^3)\right) = ln(1+u)$$

Avec $u = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}} + o(x^3)$ $u \in \mathcal{V}(0)$ (puisque $x \in \mathcal{V}(0)$)

$ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_3(u^3)$ en composant les DL on a :

$$ln(1+sinx) = \left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}}\right) - \frac{\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3!}}\right)^3}{3} + o_3(x^3)$$

$$ln(1+sinx) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_3(x^3)$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx) - ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_3(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_2(x^3)\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o_3(x^3) - o_2(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x) - x^3\varepsilon_2(x)}{x^2}$$

(avec $\varepsilon_3(x) \to 0$ et $\varepsilon_2(x) \to 0$ $quand$ $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx) - ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon_3(x) - \varepsilon_2(x)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x\left(-\frac{1}{6} + \varepsilon_3(x) - \varepsilon_2(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx) - ln(1+x)}{x^2} = 0$$

Université Oran 1 **2020-2021**

L.M.D-Génie Biomédical **Mathématiques 1 TD N° 3**

Développements limités

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{1+x}$

Ecrire le développement de Taylor en 0 d'ordre 2 de f

En utilisant la formule obtenue donner une valeur approchée de $\sqrt{101}$.

Exercice 2

Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

$a)$ $f(x) = \frac{1+x}{1-x+x^2}$, b) $f(x) = \frac{sinx+3cosx}{1-x}$, c) $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, d) $f(x) = \sqrt{1+tgx}$

e) $f(x) = cos(Arctgx)$ (en déduire $f^{(4)}(0)$.

Exercice 3

Donner le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 4 de $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$

Donner le développement limité au voisinage de 2 à l'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 4

En utilisant les développements limités calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arcsinx-x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx(cos2x-cosx)}{tgx-sinx}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx)-ln(1+x)}{x^2}$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Exercice 5 $f(x) = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{1+x}$

Former le développement asymptotique en ∞, en déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f et sa position.

L.Mébarki

Université Oran 1 **2020-2021**

LMD-Génie Biomédical

Mathématiques 1 Révision générale

Exercice 1 (examen final 2017-2018)

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (Rattrapage 2019-2020)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Arctgx}{1-x}, & x < 1 \\ e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f dans son domaine de définition.
b) Donner $f'(x)$ la dérivée de f.
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = -1$.
d) Donner le DL de $Arctgx$ et de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
e) En déduire le DL de $\frac{Arctgx}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 .
f) Former le DL au voisinage de +∞ de $\frac{f(x)}{x}$
g) En déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f en +∞ et sa position.

Exercice 3 (examen final 2018-2019)

Soit $f(x) = Arctg(e^{2x} - 1)$

a) Donner le domaine de définition la dérivée et le tableau de variation de f.
b) Donner le DL de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
c) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $\big(0, f(0)\big)$.
d) Tracer le graphe de f.

L.Mébarki