Chapitre 3

Résolution des Systèmes Linéaires Ax=b, Méthodes Itératives

1. Introduction

Lorsque le nombre des inconnues d'un système linéaire devient grand, le schéma des méthodes directes donnant une solution exacte devient compliqué. Dans ces conditions, il devient plus commode de rechercher les solutions en utilisant des méthodes numériques approchées : ce sont les méthodes itératives.

Parmi ces méthodes, on peut citer celles de **JACOBI,** de **GAUSS-SEIDEL, la méthode de la RELAXATION,** etc.…

Remarque

Les méthodes itératives sont rarement utilisées pour la résolution des systèmes à matrices pleines et de faibles dimensions. On préfère les utiliser pour les systèmes de grande taille (n ≥ 100 équations).

2. Principe de résolution des méthodes itératives

Dans la classe des méthodes itératives, pour approcher la solution x, on passe d'une estimation $x^{(k)}$ de la solution à une autre estimation $x^{(k+1)}$.

Autrement dit , partant d'un vecteur estimé initial $x^{(0)}$, on génère une suite de valeurs $\{x^{(0)}, x^{(1)},\ldots, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(s)}\}$ qui converge vers la solution $x^{(s)}$ quand $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$ (ε : étant la précision de calcul imposée).

Remarque

$x^{(k+1)}$ est calculé en fonction de $x^{(k)}$ et $x^{(s)}$ désigne la solution du système à ε prés .

3. La convergence des méthodes itératives

Soit à résoudre le système linéaire Ax=b où A est une matrice carrée d'ordre n régulière.

On pose :

A=M-N (M doit être régulière) alors le système Ax=b s'écrit de la forme :

$Mx=Nx+b \Rightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$ ce qui peut être représentée par la relation itérative suivante: $x^{(k)}=\alpha x^{(k-1)} + \beta$; avec $\alpha = M^{-1}N$ et $\beta = M^{-1}b$.

$x^{(k+1)}$ converge-elle vers le vecteur solution x^* ?

Théorème

Une condition suffisante de convergence de la méthode de Jacobi est que la matrice A du système linéaire A.x= b ***soit à diagonale fortement dominante.***

La méthode de GAUSS-SEIDEL est aussi convergente quand la matrice A du système linéaire A.x= b est ***à diagonale fortement dominante.***

4. L'estimation du nombre maximal d'itérations

Le nombre maximal des itérations à réaliser dans un processus itératif k_{max} (avec une certaine précision ε) est donné par :

$$k_{max} \geq \frac{\text{Ln } \varepsilon + \text{Ln}(1-\|\alpha\|) - \text{Ln}(\|\beta\|)}{\text{Ln}(\|\alpha\|)} - 1$$

5. L'algorithme de JACOBI

Le processus itératif de JACOBI opère selon l'algorithme suivant :

> *$x^{(o)}$, ε : donnés ;*
>
> *Pour i=1 à n Faire*
>
> $$x_i^{(k+1)} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} / a_{ii} \; x_j^{(k)} \;\; ; \;\; \forall \; i \neq j$$
>
> *Arrêter si* $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$

6. L'algorithme de GAUSS SEIDEL

Le processus itératif de GAUSS-SEIDEL opère selon l'algorithme suivant :

> *$x^{(o)}$, ε : donnés ;*
>
> *Pour i=1 à n Faire*
>
> $$x_i^{(k+1)} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} / a_{ii}) \; x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} / a_{ii}) \; x_j^{(k)}$$
>
> *Arrêter si* $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

- Résoudre par la méthode de JACOBI le système linéaire suivant avec une précision de calcul $\varepsilon = 10^{-3}$. Estimer au préalable le nombre maximal d'itérations.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24\,x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Solution

Estimation du nombre d'itérations :

Le système linéaire Ax=b s'écrit sous la forme $x^{(k+1)} = \alpha\, x^{(k)} + \beta$

Où :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a :$\|\alpha\|^{(k+1)} \leq (1-\|\alpha\|)\varepsilon / \|\beta\|$

Avec $\|\alpha\|$= Max (0,04 ; 0,08 ; 0,07) = 0,08 < 1 (le processus itératif converge) et $\|\beta\| = 10$

Alors $(k+1) \log (0,08) \leq -\log (0,92) - \log (10) + \log 10^{-3}$ et $k > 2,679$;

Par suite : $k_{max} \approx 3$ itérations (au maximum)

Résolution :

<u>K=1</u>

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,06\, x_2^{(0)} + 0,02\, x_3^{(0)} + 2 \\ x_2^{(1)} = -0,03\, x_1^{(0)} + 0,05\, x_3^{(0)} + 3 \\ x_3^{(1)} = -0,01\, x_1^{(0)} + 0,02\, x_2^{(0)} + 5 \end{cases} \quad \text{et} = x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$x^{(1)} \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 5,04 \end{pmatrix} \qquad |x^{(1)} - x^{(0)}| > \varepsilon \quad \text{et } k < k_{max} \quad \text{alors on continue}$$

<u>K=2</u>

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,909 \\ 3,194 \\ 5,045 \end{pmatrix} \qquad |x^{(2)} - x^{(1)}| > \varepsilon \quad \text{et } k < k_{max} \quad \text{alors on continue}$$

<u>K=3</u>

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,9093 \\ 3,1949 \\ 5,0450 \end{pmatrix} \qquad |x^{(3)} - x^{(1)}| < \varepsilon \quad \text{et } k = k_{max} \quad \text{On s'arrête}$$

La solution à ε prés est alors donnée par le vecteur **x^t= (1,909 3,194 5,045)**

<u>Exercice 2</u>

- Trouver une approximation de la solution du système linéaire en utilisant la méthode de GAUSS-SEIDEL

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Prendre $x^{(0)} = (1,2 \quad 0 \quad 0)^t$ et $\varepsilon = 10^{-3}$

Solution

On constate que A est une matrice à diagonale fortement dominante, les méthodes itératives de JACOBI et GAUSS SEIDEL convergent.

Résolution par la méthode de GAUSS SEIDEL :

La formule d'itération de GAUSS SEIDEL donne:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/10(-x_2^{(k)} - x_3^{(k)})+6/5 \\ x_2^{(k+1)} = 1/50\, x_2^{(k)} - 2/25\, x_3^{(k)} + 53/50 \\ x_3^{(k+1)} = 2/125\, x_2^{(k)} + 9/250\, x_3^{(k)} + 237/250 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & -1/10 \\ 0 & 1/50 & -2/25 \\ 0 & 2/125 & 9/250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 53/50 \\ 237/250 \end{pmatrix}$$

La résolution par l'algorithme de GAUSS SEIDEL; $\varepsilon = 10^{-2}$

k	x_1	x_2	x_3
0	1,2	0	0
1	1.2	1.06	0.948
2	0,9992	1.00536	0.999088
3	0.99956	1.000180	1.00006
4	0.99998	0.999999	1.000005
5	1.000000	1.00000	0.99999
6	**1.0000**	**1.0000**	**0.99999**

$x_1 = x_2 = x_3 = 1.000 \pm 0.001$;

Le vecteur solution à ε prés est donné par: $x^t = (1 \quad 1 \quad 1)$.

<u>Exercice 3</u>

Soit le système linéaire d'ordre 3 suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 1/2\, x_2 + 1/2\, x_3 = 1 \\ 2/5 x_1 + x_2 + 1/5\, x_3 = 6/5 \\ 2/5 x_1 + 1/5\, x_2 + x_3 = -2/5 \end{cases}$$

1. Donner les matrices d'itérations α de JACOBI et de GAUSS SEIDEL en écrivant le système linéaire sous la forme $x^{(k+1)} = \alpha\, x^{(k)} + \beta$.
2. Déterminer le nombre d'itérations qu'il faudra effectuer en utilisant la méthode de JACOBI ou de GAUSS SEIDEL pour avoir la solution à 10^{-3} prés.

3. Comparer les résultats.

Solution

1. La formule d'itération de JACOBI donne:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 1/2\, x_2^{(k)} - 1/2\, x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 6/5 - 2/5\, x_1^{(k)} - 1/5 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -2/5 - 2/5\, x_1^{(k)} - 1/5 x_2^{(k)} \end{cases}$$

D'où:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)}}_{\mathbf{x^{(k+1)}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -2/5 & 0 & -1/5 \\ -2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)}}_{\mathbf{x^{(k)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}}_{\beta}$$

Où α : désigne la matrice d'itération de Jacobi

La formule d'itération de GAUSS SEIDEL donne:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 1/2\, x_2^{(k)} - 1/2\, x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 6/5 - 2/5\, x_1^{(k+1)} - 1/5 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -24/25 + 4/25\, x_2^{(k)} + 1/5 x_3^{(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 1/2\, x_2^{(k)} - 1/2\, x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 4/5 + 1/5 x_2^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -24/25 + 4/25\, x_2^{(k)} + 1/5 x_3^{(k)} \end{cases}$$

D'où:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 4/25 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \\ -24/25 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \alpha \quad x^{(k)} + \beta$$

Où α : désigne la matrice d'itération de GAUSS SEIDEL

On a:

$$K \geq \frac{\text{Ln } \varepsilon + \text{Ln}(1-||\alpha||) - \text{Ln}(||\beta||)}{\text{Ln}(||\alpha||)} - 1$$

Application numérique

- Pour JACOBI

$||\alpha|| = (1/4 + 1/4 + 4/25 + 1/25 + 4/25 + 1/25)^{1/2} = 0.95$

$||\beta|| = 1,61$ et **$k \geq$ 253 itérations (au maximum)**

- Pour GAUSS SEIDEL

$||\alpha|| = 0.78$

$||\beta|| = 1,6$ et **$k \geq$ 44 itérations (au maximum)**

1. Le nombre d'itérations de JACOBI est plus grand que celui de GAUSS SEIDEL.