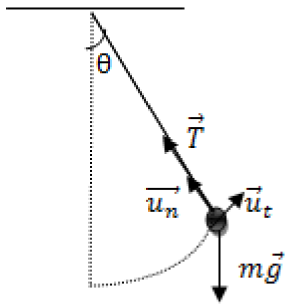
Solution de l'exercice n°2 de la fiche de TD n°3 (dynamique du point matériel)

L'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique:



Théorème du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \sum \overrightarrow{Mt}_{/o}(\overrightarrow{F})$$

$\vec{L}_{/o}$ est le vecteur moment cinétique qui est défini par: $\vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

où $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs position et vitesse respectivement.

$\overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{F})$ est le moment de force défini par: $\overrightarrow{Mt}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

Les forces appliquées sur la masse (m) sont le poids et la tension du fil,

d'où $\quad \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \vec{M}t_{/o}(\vec{P}) + \overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{T})$

Dans la base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_N)$ on a: $\quad \overrightarrow{OM} = -l\,\vec{u}_N$ et $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$

d'où $\quad \vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = -l\,\vec{u}_N \wedge v\vec{u}_t = -lmv\,(\vec{u}_N \wedge \vec{u}_t) = -lmv(-\vec{k}) = lmv\vec{k}$

$$\vec{L}_{/o} = lmv\vec{k}$$

on a $\quad \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \frac{d}{dt}(lmv\vec{k}) = lm\frac{dv}{dt}\vec{k} = lm\frac{d}{dt}(l\dot{\theta})\vec{k} = ml^2\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{k} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

$$\frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k} \qquad (1)$$

D'autre part on a:

$$\overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{P}) = \overrightarrow{Mt}_{/o}(m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -l\,\vec{u}_N \wedge (-mgsin\theta\vec{u}_t - mgcos\theta\vec{u}_N)$$

$$= lmgsin\theta\overrightarrow{(u}_N \wedge \vec{u}_t) + lmgcos\theta(\vec{u}_N \wedge \vec{u}_N) \qquad (\vec{u}_N \wedge \vec{u}_N = \overrightarrow{0})$$

$$\vec{M}t_{/o}(m\vec{g}) = -lmgsin\theta\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = -l\,\vec{u}_N \wedge (T\,\vec{u}_N) = \vec{0} \qquad \overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}t_{/o}(\vec{P}) + \overrightarrow{Mt}_{/o}(\vec{T}) = -lmgsin\theta\vec{k} \qquad (2)$$

(1)= (2) $\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -lmgsin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ équation différentielle d'ordre2 (équation du mouvement)