Université Oran 1

Génie Biomédical

2020-2021

RÉVISION GÉNÉRALE
CORRECTION

L.MEBARKI

Révision Générale

Exercice 1 (examen final 2017-2018)

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x < 0 \end{cases}$$

Solution

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x < 0 \end{cases}$$

- $f(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.
- Pour $x > 0$ on a $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, qui est continue et dérivable comme composée de fonctions définies continues et dérivables ($\sqrt{x}$, x^2+1)
  Sa dérivée est donnée par :
  $$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+1)'$$
  $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
- Pour $x < 0$ on a $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ continue et dérivable comme quotient de fonctions définies continues et dérivables (1, x^2+1).
  Sa dérivée est :
  $$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = ((x^2+1)^{-1})' = -1(x^2+1)^{-1-1}(x^2+1)'$$
  $$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

- Pour $x = 0$, $f(0)=\sqrt{0^2+1}= 1$

  i) Etudions la continuité en 0, cherchons alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

  $$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{0^2+1} = 1 = f(0)$$

  $$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0^2+1} = 1 = f(0)$$

  On a alors trouvé

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f \text{ continue pour } x = 0$$

  ii) Etudions la dérivabilité en 0, cherchons alors $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

  Dans notre cas $x_0 = 0$ et $f(x_0) = f(0) = 1$

  $$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
  $$=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)}= 0$$

  $$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\frac{1}{x^2+1}-1}{x} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{1-(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x^2}{x(x^2+1)}=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x}{(x^2+1)} = 0$$

  On a :

  $$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

Conclusion:

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & ,x > 0 \\ -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & ,x < 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (Rattrapage 2019-2020)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Arctgx}{1-x}, & x < 1 \\ e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f dans son domaine de définition.
b) Donner $f'(x)$ la dérivée de f.
c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = -1$.
d) Donner le DL de $Arctgx$ et de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
e) En déduire le DL de $\frac{Arctgx}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 .
f) Former le DL au voisinage de +∞ de $\frac{f(x)}{x}$
g) En déduire l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f en +∞ et sa position.

Solution

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Arctgx}{1-x}, & x < 1 \\ e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$f(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

a) Etudions la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x < 1$, $f(x) = \frac{Arctgx}{1-x}$ fonction définie, continue et dérivable comme quotient de fonctions continues dérivables ($Arctgx, 1 - x$)

$$f'(x) = \left(\frac{Arctgx}{1-x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(1-x) - (Arctgx)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x) + (Arctgx)(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x)^2}$$

- Pour $x > 1$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - x}$ fonction définie, continue et dérivable comme composées et produit de fonctions continues dérivables ($e^x, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, x^2 - x$)

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - x}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{x^2 - x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

- Pour $x = 1$, $f(1) = e^{\frac{1}{1}}\sqrt{1^2 - 1}$ =0

i) Etudions la continuité en 1, cherchons alors $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2 - x} = e^{\frac{1}{1}}\sqrt{1^2 - 1} = 0 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{Arctgx}{1-x} = +\infty$$

(car $Arctgx \to Arctg1 = \frac{\pi}{4}$ et $1 - x \to 0^+$)

f n'est pas continue au point 1.

ii) Dérivabilité au point 1

f n'est pas continue en $1 \Longrightarrow f$ n'est pas dérivable en 1.

b) $f'(x)$ la dérivée de f

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)+(Arctgx)(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x)^2}, & x < 1 \\ \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{x^2 - x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}, & x > 1 \end{cases}$$

c) L'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = -1$

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

- $f(-1) = \frac{Arctg(-1)}{1-(-1)} = \frac{-\frac{\pi}{4}}{2} = -\frac{\pi}{8}$
- $f'(-1) = \frac{(1-(-1))+(Arctg(-1))(1+(-1)^2)}{(1+(-1)^2)(1-(-1))^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$$y = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(x + 1) - \frac{\pi}{8}$$

L'équation de la tangente au point -1 est :

$$\boxed{y = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{4-3\pi}{16}}$$

d) le DL de $Arctgx$ et de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

- DL de $Arctgx$ au voisinage de 0
  Utilisons les propriétés des DL :
  $(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$
  (faites tout simplement la division de 1 par $1 + x^2$)
  $Arctgx = Arctg0 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
  ($x - \frac{x^3}{3}$ est la primitive de 1-x^2 c'est-à-dire $\left(x - \frac{x^3}{3}\right)' =$ 1-x^2)
  Donc $\boxed{Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$
- DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
  $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)}$
  (faites la division 1 par 1-x)

Remarque : vous pouvez aussi retenir ces DL.

e) En déduire le DL de $\frac{Arctgx}{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 .

$$\frac{Arctgx}{1-x} = Arctgx\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)(1 + x + x^2 + x^3) + o(x^3)$$

$$\boxed{\frac{Arctgx}{1-x} = x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)}$$

f) le DL au voisinage de +∞ de $\frac{f(x)}{x}$

- $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\sqrt{x^2 - x}$
- Posons $= \frac{1}{x}$, $x \in \mathcal{V}(+\infty) \implies X \in \mathcal{V}(0)$
- $\frac{f(x)}{x} = Xe^X\sqrt{\frac{1-X}{X^2}} = Xe^X\frac{\sqrt{1-X}}{|X|} = e^X\sqrt{1-X}$
  - e^X=1+X+$\frac{X^2}{2!} + o(x^2)$

- $\sqrt{1-X} = (1-X)^{\frac{1}{2}}$=$(1+t)^{\frac{1}{2}}$ (t=$-X \in \mathcal{V}(0)$)

Appliquer ★ avec $\alpha = \frac{1}{2}$

$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{t^2}{2!}$+ $o(t^2)$

On revient à X

$$\sqrt{1-X} = 1 - \frac{1}{2}X\text{-}\frac{1}{8}X^2\text{+ } o(x^2)$$

On a alors :

$$e^X\sqrt{1-X} = \left(1 + \mathrm{X} + \frac{X^2}{2!}\right)\left(1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2\right) + \ o(x^2)$$

$$e^X\sqrt{1-X}\text{= 1+}\frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2\text{+ } o(x^2)$$

En revenant à x le DL au voisinage de +∞

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

g) l'équation de l'asymptote oblique à la courbe de f en +∞ et sa position.

Directement du DL au $\mathcal{V}(+\infty)$ on a :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \ o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

- L'équation de l'asymptote est $y = x + \frac{1}{2}$
- La position est donnée par $f(x) - y = -\frac{1}{8x} + \ o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc la position est donnée par $-\frac{1}{8x}$

$f(x) - y < 0$ au $\mathcal{V}(+\infty)$ $\Longrightarrow$ la courbe de f est au dessous de l'asymptote oblique.

Exercice 3 (examen final 2018-2019)

Soit $f(x) = Arctg(e^{2x} - 1)$

a) Donner le domaine de définition la dérivée et le tableau de variation de f.
b) Donner le DL de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
c) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$.
d) Tracer le graphe de f.

Solution

$f(x) = Arctg(e^{2x} - 1)$

a)

1. Domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$

   Car $Arctgx$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $e^{2x} - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La dérivée de f

   $$f'(x) = \left(Arctg(e^{2x} - 1)\right)' = Arctg'(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 1)'$$

   $$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1 + (e^{2x} - 1)^2}(2e^{2x})}$$
3. Tableau de variation

   $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Arctg(e^{2x}-1) = Arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$
  (Car $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Arctg(e^{2x}-1) = \frac{\pi}{2}$
  (car $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} Arctgx = \frac{\pi}{2}$)

b) le DL de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$f(x) = Arctg(e^{2x}-1)$

C'est une fonction composée $Arctgx \text{ et } e^{2x}-1$ qui admettent des DL au voisinage de 0, et $e^0 - 1 = 0$

$$Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Posons $u = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$ alors

$$Arctg(e^{2x}-1) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$= \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) - \frac{1}{3}\left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)^3 + o(x^3)$$

Le DL de $f(x)$ au voisinage de 0 est :

$$Arctg(e^{2x}-1) = 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

c) l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$.

- Directement du DL de f au voisinage de 0, l'équation de la tangente en 0 à la courbe est : $y = 2x$

La position est donnée par $f(x) - y = 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$, donc par $2x^2$

Et on a alors $f(x) - y > 0 \Longrightarrow$ La courbe de f est au dessus de la tangente.