2020-2021

Université d'Oran

LMD- Génie Biomédical

EXAMEN FINAL DE MATH 1
CORRECTION ET BAREME

L. MEBARKI

Université d'Oran Es-Sénia
Faculté des sciences exactes et appliquées Année universitaire 2020-2021
LMD-1^{ere} Année Génie Biomédical

Examen Final Math 1 Durée 1H10mn

(Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints pendant la durée de l'épreuve)

Exercice 1 (sur 6)

On définit la fonction f de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.
2) Donner f' la dérivée de f.

Exercice 2 (sur 7)

Soit f la fonction suivante:

$$f(x) = Arctg(\tfrac{1}{x}) - Arc\sin x$$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Calculer $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$(Préciser le domaine de définition de f').
3) Donner le tableau de variation de f.

Exercice 3 (sur 7)

Soit $f(x)$ la fonction suivante:

$$f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)}$$

1) Donner le developpement limité de la fonction $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2) En déduire $f^{(3)}(0)$ (la dérivée d'ordre 3 de f au point 0).
3) En utilisant les développements limités calculer la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(2x)}-1-x}{x\ln(1+x)}$$

Correction

Exercice 1

La fonction $f(x)$ est de la façon suivante:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

$f(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$. Sur 0,25

1) Etudions la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x\neq 0$, $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

f est alors définie continue et dérivable comme quotient, somme et composée de fonctions continues et dérivables ($x, e^{x}, \frac{1}{x}$) Sur0,5

$$\boldsymbol{f'(x)}=\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-(x)\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-(x)e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)-(x)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x)}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}}$$

Sur 1

- Pour $x=0$, $f(0)=0$

a) Continuité

Calculons $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

On considère $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

❖ $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} x \cdot \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 \cdot 0 = 0 = f(0).$ Sur 0,75

(car $x \overset{>}{\to} 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Longrightarrow e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \Longrightarrow 1 + e^{\frac{1}{x}} \to +\infty \Longrightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \longrightarrow 0$)

❖ $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0 = f(0).$

(Car $x \overset{<}{\to} 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Longrightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0 \Longrightarrow 1 + e^{\frac{1}{x}} \to 1 \Longrightarrow \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \longrightarrow 0$) Sur 0,75

En conclusion :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} f(x) = f(0) \Longrightarrow f$ est continue au point 0. Sur 0,25

b) Dérivabilité

Calculons $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x\neq 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ Sur 0,5

On considère $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ et $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ (car $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$) Sur 0,5

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$ (car $e^{\frac{1}{x}} \to 0$) Sur 0,5

En conclusion :

f n'est pas dérivable au point 0 car $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Sur 0,5

2) La dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{e}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)}{\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{e}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}\right)^{\mathbf{2}}} \quad \text{pour } x \neq 0$$ Sur 0,5

Exercice 2

$$f(x) = \text{Arctg}\left(\frac{1}{\text{x}}\right) - \text{Arcsinx}$$

1) Domaine de définition de f

$D_f = [-1,0[\cup]0,1]$

Car : $Arctgx$ est définie sur $\mathbb{R}$

$\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

$Arcsinx$ est définie sur $[-1,1]$.

Sur 1,5

2) Dérivée de f :

$$f'(x) = Arctg'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - (Arcsinx)'$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\boxed{f'(x) = -\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

sur 1,5

f' est définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$

Car $Arcsinx$ n'est pas dérivable aux points -1 et 1.

Sur 0,5

3) Tableau de variation de f:

$f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est décroissante sur D_f. Sur O,5

$f(-1) = Arctg(-1) - Arcsin(-1) = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ Sur 0,5

$f(1) = Arctg(1) - Arcsin(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ sur 0,5

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ (car $Arctgx \xrightarrow[qd\ x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $Arcsin0 = 0$) Sur0,75

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ (car $Arctgx \xrightarrow[qd\ x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$ et $Arcsin0 = 0$) Sur0,75

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ || $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$

Sur 0,5

Exercice 3

$f(x) = \sqrt{1 + sin(2x)}$

1) Développement limité à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(0)$

$f(x)$ est la composée de la fonction $\sqrt{1+x}$ et $sin(2x)$

Qui admettent des DL au $\mathcal{V}(0)$ et $\lim_{x\to 0} sin(2x)$=0 alors

Sur 0,5

$f(x)$ admet un DL au $\mathcal{V}(0)$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Sur 0,5

$$sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + + o((2x)^3)$$

$$\boxed{sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + + o(x^3)}$$

Sur 0,5

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$\sqrt{1+x}$ =1+$\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ o(x^3)$ Sur 1

On a alors :

$\sqrt{1+sin(2x)}$ =1+$\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+\ o(u^3)$

Avec $u=2x-\frac{4x^3}{3}$

$\sqrt{1+sin(2x)}$ = Sur 1,5

= 1+$\frac{1}{2}\left(2x-\frac{4x^3}{3}\right)-\frac{1}{8}\left(2x-\frac{4x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(2x-\frac{4x^3}{3}\right)^3+\ o(x^3)$

=1+$x\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)$+$x^2\left(-\frac{1}{8}\cdot 4\right)+x^3\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{16}\cdot 2^3\right)+\ o(x^3)$

$$\boxed{\sqrt{1+sin(2x)}=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\ o(x^3)}$$

2) Déduisons $f^{(3)}(0)$

En utilisant la formule de Taylor pour $f(x)=\sqrt{1+sin(2x)}$

Au voisinage de 0 ,

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x^2\frac{f''(0)}{2!}+x^3\frac{f^{(3)}(0)}{3!}+o(x^3)$$

Par identification avec le résultat trouvé on a : Sur 1

$$-\frac{1}{6}=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\Longrightarrow f^{(3)}(0)=-\frac{3!}{6}=-1$$

3) Calcul de limite avec les DL

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+sin(2x)}-1-x}{xln(1+x)}$$

On a les développements limités suivants :

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x\, ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Sur 1

$$\sqrt{1+sin(2x)} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+sin(2x)}-1-x}{xln(1+x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-1-x}{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)} = -\frac{1}{2}$$

Sur 1