Corrigé de l'Examen final de la matière Méthodes Numériques

Exercice 1

Soit le système d'équations linéaires (SL) A x = b suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 5x_3 = 16 \end{cases}$$

1) Expliquer le principe de la méthode de Gauss pour résoudre un système linéaire Ax= b **2pts**
   - **L'augmentation de la matrice A par le second membre b**
   - **La triangularisation par l'algorithme de GAUSS en vérifiant si le pivot est nul ou non**
   - **La résolution en utilisant la remontée**
2) Calculer la transposée A^t de A et déduire le type de la matrice A. **1pt**

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   $A = A^t$ alors A est une matrice carrée symétrique 1pt
3) Résoudre le système linéaire par la méthode de GAUSS (Stratégie : sans pivotation). **3pts**

   $$A^{(0)}, b^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 16 \end{array}\right) \end{array}$$

   <u>K=1</u>

   $$A^{(1)}, b^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 16 \end{array}\right) \end{array}$$

   <u>K=2</u>

   $$A^{(2)}, b^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \end{array}$$

Après la phase de remontée, la solution du SL est $x^{(t)}$= (1 -2 4) 2pts

4) Calculer le déterminant de A. **1pt**

   Det(A)=4*4*4 = 64

Exercice 2

Soit le système d'équations linéaires (SL) A x = b suivant :

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 = 1 \\ mx_1 + x2 + mx_3 = 1 \\ mx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Où**m** est un paramètre réel

1) Quelles sont les conditions d'applicabilité des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel ?**2pts**

   - Systèmes linéaires de grande taille (n > 100 équations).

   - Systèmes linéaires dont la matrice des coefficients A est creuse (plus de 50 % des $a_{i,j}$sont nuls, par exemple le cas des matrices tridiagonales).

2) Pour quelles valeurs de **m**, les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ?

   Les méthodes itératives si la matrice des coefficients A est à diagonale fortement dominante :1pt

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \ \forall i = 1..n$$

   Dans notre cas, il faut vérifier que : 1pt

$$|a_{1,1}| = |1| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| = |m| \ et \ |a_{2,2}| = |1| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| = |m| + |m| = 2|m| \ et \ |a_{3,3}| = |1| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}| = |m|$$

$$\Rightarrow |m| < 1 \ et \ |m| < 1/2 \Rightarrow |m| < 1/2$$

$$\Rightarrow -1/2 < m < 1/2$$

3) Pour **m=**$-\frac{1}{4}$, faire deux itérations de la méthode de Jacobi en partant de l'approximation initiale $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ et la précision de calcul $\varepsilon = 10^{-3}$

   Il faut vérifier à chaque fois la condition d'arrêt de l'algorithme de Jacobi.

On rappelle que la solution exacte du SL obtenu par une méthode directe est $X = (10/7,\ 12/7,\ 10/7)^T$.

Pour $m = -1/4$, **le système linéaire à résoudre est comme suit :1pt**

$$\begin{cases} x_1 - 1/4\, x_2 = 1 \\ -1/4\, x_1 + x2 - 1/4\, x_3 = 1 \\ -1/4\, x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Méthode de Jacobi :1pt

A. $x = b \Leftrightarrow x^{(k+1)} = B\, x^{(k)} + C \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}\, x_j^{(k)})/a_{i,i} \;\; \forall i = 1..n$

Tant que $(\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_2 > \varepsilon)\; et\; (k < n\max iter)$

Le système d'itération de Jacobi est comme suit : 1pt

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_2^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_1^{(k)} + \frac{1}{4} x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_2^{(k)} + 1 \end{cases} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \varepsilon = 10^{-3} = 0.001$$

1pt1pt

k	0	1	2
X1	0.000	1.000	5/4=1.250
X2	0.000	1.000	3/2=1.500
X3	0.000	1.000	5/4=1.250

On vérifier à chaque fois la condition d'arrêt de l'algorithme de Jacobi :

$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_2 = \left\| (1,1,1)^T \right\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = 1.732 > \varepsilon$ **0.5pt**

$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_2 = \left\| (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})^T \right\|_2 = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{(\frac{3}{8})} = 0.612 > \varepsilon$ **0.5pt**

Important : Pour le test d'arrêt, le calcul en utilisant la valeur absolue est compté correct