Université d'Oran 1
LMD-Génie-Biomédical

2020-2021

Examen de Rattrapage Math 1
correction exercice n°4 fiche de TD 1 Math 2

L.MÉBARKI

LMD-1^{ere} Année Génie Biomédical

Examen de Rattrapage Math 1 Durée 1H10mn

(Les calculatrices sont interdites et les téléphones portables doivent être éteints pendant la durée de l'épreuve)

Exercice 1 (sur 6)

On définit la fonction f de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{Arctg\, x^2}{x} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) Trouver a pour que f soit continue au point 0.
2) Pour cette valeur a trouvée, montrer que f est dérivable au point 0, donner alors la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (sur 7)

Soit f la fonction suivante:

$$f(x) = 2x + 1 - Arc\cos(\sqrt{x})$$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Calculer $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$(Préciser le domaine de définition de f').
3) Donner le tableau de variation de f.

Exercice 3 (sur 7)

Soit $f(x)$ la fonction suivante:

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$

1) Donner le développement limité de la fonction $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.
2) En déduire le développement limité de $f(x)$ à l'orde 3 au voisinage de 0.
3) En utilisant les développements limités calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{\cos x} - 1}.$$

Correction exercice n°4 de la fiche de TD 1.

Exercice 4

Soit le système (S) $\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}$

1) Trouver le déterminant du système,
2) discuter sur $\mathbb{R}$, la résolution de ce système
3) pour $a = 2$, trouver la solution par Cramer.

Rappel:

Pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3

On peut soit :

- **Utiliser la règle de Sarrus, soit**
- **Développer par rapport à une ligne ou à une colonne, soit**
- **Utiliser les propriétés des déterminants**
  - **Si une ligne ou une colonne est multipliée par λ le déterminant est multiplié par λ.**
  - **Le déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne ou à une colonne la combinaison linéaire des autres lignes ou des autres colonnes**

1) Ecriture matricielle du système (S)

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant du système Δ :

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}1 & -a & a^2\\ a & -a^2 & a\\ a & 1 & -a^3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -a & a^2\\ a & -a^2 & a\\ a & 1 & -a^3\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}1 & -a & a^2\\ 1 & -a & 1\\ a & 1 & -a^3\end{vmatrix} \quad (1^{ere}\text{ ligne }-2^{ème}\text{ligne})$$

$$=a\begin{vmatrix}0 & 0 & a^2-1\\ 1 & -a & 1\\ a & 1 & -a^3\end{vmatrix} \quad (\text{ développer }/1^{ere}\text{ ligne})$$

$$=a(a^2-1)\begin{vmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta= a(a^2-1)(1+a^2)}$$

2) Discutons la résolution du système sur $\mathbb{R}$:

- **Cas** $\Delta\neq 0$ (a$\in\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$)

  Dans ce cas le système est de Cramer, il admet une solution unique donnée par les formules de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}a & -a & a^2\\ 1 & -a^2 & a\\ 1 & 1 & -a^3\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{a\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & -a^2 & a\\ 1 & 1 & -a^3\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=\frac{a^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -a^2 & 1\\ 1 & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=$$

$$\frac{a^2\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -a^2 & 1\\ 1+a^2 & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)} \quad (\ 1^{\text{ère}}\ colonne-3^{\text{ème}}colonne)$$

$$=\frac{a^2(1+a^2)\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -a^2 & 1\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=\frac{a^2(1+a^2)(-1+a^2)}{a(a^2-1)(1+a^2)}$$

Ce qui donne $\boxed{x=a}$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & 1 & a\\ a & 1 & -a^3\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{a\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}$$

$$=\frac{a\begin{vmatrix}1-a & a-1 & a-1\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}\ (1^{\text{ère}}ligne-2^{\text{ème}}ligne)$$

$$=\frac{a(a-1)\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}$$

$$=\frac{a(a-1)\begin{vmatrix}-1-a & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}\ (1^{\text{ère}}ligne-2^{\text{ème}}ligne)$$

$$=\frac{a(a-1)(-1-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -a^2\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=\frac{a(a-1)(-1-a)(-a^2-1)}{a(a^2-1)(1+a^2)}=$$

Ce qui donne $\boxed{y=1}$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -a & a\\ a & -a^2 & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}1-a & -a & a\\ a-1 & -a^2 & 1\\ a-1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}\ (1^{\text{ère}}colonne-3^{\text{ème}}colonne)$$

$$=\frac{(a-1)\begin{vmatrix}-1 & -a & a\\ 1 & -a^2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}\ (1^{\text{ère}}colonne-3^{\text{ème}}colonne)$$

$$=\frac{(a-1)\begin{vmatrix}-1-a & -a & a\\ 0 & -a^2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=\frac{(a-1)(-1-a)\begin{vmatrix}-a^2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{a(a^2-1)(1+a^2)}=$$
$$\frac{(a-1)(-1-a)\left(-a^2-1\right)}{a(a^2-1)(1+a^2)}=\frac{1}{a}$$

$$\boxed{z=\frac{1}{a}}$$

Conclusion :
Si a$\in \mathbb{R}-\{0,1,-1\}$, le système admet une solution unique égale à $\left(a,1,\frac{1}{a}\right)$.

- Si $\Delta=0$ ($a\in\{0,1,-1\}$

1) $a=0 \Longrightarrow (S)$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Le mineur $M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$

On considère alors le det(A_1,A_2,B)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Donc pour $a = 0$ le système est impossible.

$2)\ a = 1 \Rightarrow (S)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le mineur $M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$

Considérons $|A_1 \quad A_2 \quad B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

(deux lignes identiques)

Donc pour $a = 1$ le système est indéterminé.

$3)\ a = -1 \Rightarrow (S)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le mineur $M_{13}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

Considérons $|A_1 \quad A_2 \quad B|$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ **(deux lignes identiques)**

Donc pour $a = -1$ le système est indéterminé.