Université d'Oran 1 **2020-2021**

LMD-L1 Génie Biomédical

Résumé cours Equations Différentielles Ordinaires et fiche de TD

L.Mébarki

Résumé du cours Equations Différentielles Ordinaires (E.D.O) 1^{er} et 2^{eme} Ordre

1.Equations différentielles du 1^{er} ordre

Forme : $y'=f(x,y)$

1.1 E.D.O à variables séparables

Forme : $f(x)dx = g(x)dx$
D'où $\int f(x)dx = \int g(x)\,dx + Cst$

Exemple :

$y'sinx - ycosx = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{cosx}{sinx}dx \Longrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{cosx}{sinx}dx \Longrightarrow$
$Ln|y|=Ln|sinx| + K \Longrightarrow y = Csinx.$

1.2 E.D.O Homogènes

Forme : $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, f $continue\ sur\ I \subset \mathbb{R}$

Poser $t = \frac{y}{x} \Longrightarrow$

$$y = tx \Longrightarrow y' = t'x + t \Longrightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

Exemple :

$x\left(y' - \frac{y}{x}\right) - y + x = 0 \Longrightarrow y' = \frac{2y}{x} - 1,$ on pose $t = \frac{y}{x} \Longrightarrow$

$y = tx \Longrightarrow y' = t'x + t$ l'équation devient $t'x + t$ $=2t - 1 \Longrightarrow$

$t'x$ $=t - 1 \Longrightarrow \frac{dt}{t-1} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow Ln|t - 1|=Ln|x| + K \Longrightarrow$

$t - 1 = Cx,\ \ C \in \mathbb{R}$ d'où $t = Cx + 1 \Longrightarrow y = Cx^2 + x, C \in \mathbb{R}$.

1.3 E.D.O Linéaires

Forme : $f(x)y' + g(x)y = h(x)\ \ (1)$

- Y solution de (1) est de la forme $Y = y_0 + y$, avec

y_0 : solution particulière de (1)

y : solution générale de $f(x)y' + g(x)y = 0\ \ (2)$

- Par la méthode variation de la constante :

  Dans y la solution général de (2), on remplace la constante C par $C(x)$, on dérive et on remplace dans (1).

Exemples :

1. $x^2y' - y = x^2 - x + 1 \quad (1)$

$y_0 = x - 1$, est une solution particulière de $(\mathbf{1})$

$$x^2y' - y = 0 \quad (2)$$

$x^2y' - y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x}}$ (solution générale de (2))

$Y = Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1$, Solution générale de (1).

2. $y' + ytgx = sin2x \quad (1)$

$y' + ytgx = 0 \quad (2)$

$y' + ytgx = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{sinx}{cosx}dx \Longrightarrow y = Ccosx$

Avec la méthode variation de la constante :

On considère $y = C(x)cosx \Longrightarrow$

$y' = C'(x)cosx - C(x)sinx$ dans (1) on trouve

$C'(x) = \frac{sin2x}{cosx} \Longrightarrow C'(x) = 2sinx \Longrightarrow$

$C(x) = -2cosx + K \Longrightarrow y = (-2cosx + K)cosx$

D'où $y = -2cos^2x + Kcosx, K \in \mathbb{R}$.

1.4 E.D.O de Bernoulli

Forme : (1) $f(x)y' + g(x)y = h(x)y^k$, $k \neq 0, k \neq 1$

Méthode de résolution : on multiplie (1) par y^{-k} :

$$(1') \quad f(x)y'y^{-k} + g(x)y^{1-k} = h(x)$$

Dans $(1')$ on pose $z = y^{1-k} \Longrightarrow z' = (1-k)y^{-k}y'$

On a : (I) $\frac{f(x)}{1-k}z' + g(x)z = h(x)$ (EDO linéaire)

Exemple: $(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$ (1)

L'équation (1) ⟺ $2xy^5 - y + 2xy' = 0$ ⟺

$$2xy' - y = -2xy^5 \quad \text{(1) (EDO de Bernouilli)}$$

On multiplie par y^{-5}

$$2xy'y^{-5} - y^{-4} = -2x \qquad (1')$$

On pose $z = y^{-4} \Longrightarrow z' = -4y^{-5}y'$

On a : (I) $\frac{x}{2}z' + z = 2x$ (EDO linéaire)

$$\begin{cases} \frac{x}{2}z' + z = 2x & \text{(I)} \\ \frac{x}{2}z' + z = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Résolution

$$\frac{x}{2}z' + z = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{x}{2}z' = -z \Longrightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{2}{x} \Longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{2}{x}\, dx$$

$$\Longrightarrow Ln|z| = -2Ln|x| + K \Longrightarrow Ln|z| = Ln|x^{-2}| + K$$

Ce qui donne :

$z = Cx^{-2} = \frac{C}{x^2}$, C∈ ℝ (solution générale de (II))

Cherchons z_0 Solution particulière de (I)

$$\frac{x}{2}z' + z = 2x \qquad (\mathrm{I})$$

Astuce Pratique :

> Pour chercher une solution particulière y_0 d'une EDO
>
> linéaire $f(x)y' + g(x)y = P_n(x) \qquad (*)$
>
> Avec $P_n(x)$ un polynôme de degré n
>
> il suffit de chercher y_0 de la forme $y_0 = Q_n(x)$ $(d^oQ_n = n)$

Dans notre cas on a $P_n(x)$ $=2x$ donc cherchons z_0 de la forme $z_0 = ax + b$

d'où $z'_0 = a$

On remplace dans (I) : $\frac{x}{2}a + ax + b = 2x$

$$b + \frac{3}{2}ax = 2x \Longrightarrow b = 0 \ \ et \ \ \frac{3}{2}a = 2 \Longrightarrow a = \frac{4}{3} \text{ et } b = 0$$

- Donc une solution particulière de (I) est $z_0 = \frac{4}{3}x$

  D'après **1.3** $Z = z + z_0 = \frac{C}{x^2} + \frac{4}{3}x$ est la solution générale de (I).

- ♦ Si on ne connait pas une solution particulière z_0 , on utilise la méthode variation de la constante.
  Dans la solution générale de (II), on pose $C(x)$, donc $z = \frac{C(x)}{x^2}$, on dérive et on remplace dans (I).

$$z' = \frac{C'(x)x^2 - 2C(x)x}{x^4}$$

dans (I): $\frac{x}{2}\left(\frac{C\prime(x)x^2 - 2C(x)x}{x^4}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = 2x$

$$\frac{C\prime(x)}{2x} = 2x \Longrightarrow C'^{(x)} = 4x^2$$

$$C(x) = \int 4x^2 dx + K = 4\int x^2\, dx + K$$

$$C(x) = 4\frac{x^3}{3} + K$$

$$z = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{4\frac{x^3}{3}+K}{x^2} = \frac{4}{3}x + \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Alors la solution générale de (1) est :

$$z = y^{-4} \Rightarrow z = \frac{1}{y^4} \Rightarrow y^4 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \left(\frac{1}{\frac{4}{3}x+\frac{K}{x^2}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad K \in \mathbb{R}.}$$

2 Equations différentielles du second ordre

Forme : $y = f(x, y, y')$

2.1 EDO du 2ème ordre se ramenant au 1ère ordre

Forme : $y" = f(x, y')$

Poser $z = y' \Rightarrow y' = y"$

et

Forme : $y" = f(y, y')$

Poser $y' = p(y)$: $(p: fct\ en\ y)$

$$y" = p(y).\frac{dp}{dy}$$

2.2 EDO du 2ème ordre linéaire

Forme : $f(x)y" + g(x)y' + h(x)y = k(x)$ (1)

$f(x)y" + g(x)y' + h(x)y = 0$ (2)

Résolution : $Y = y_0 + y$

(y_0: solution particulière de (1), y: solution générale de (2))

La solution générale de (2) : $y = C_1y_1 + C_2y_2$, y_1, y_2 : solutions de (2) linéairement indépendantes ($\frac{y_1}{y_2} \neq Cst$).

2.3 EDO Linéaire à coefficients constants

Forme : $ay" + by' + cy = f(x)$ (1)

$ay" + by' + cy = 0$ (2)

$$Y = y + y_0$$

Solution générale de (1) Solution générale de (2) Solution particulière de (1)

1. Pour trouver y

On considère l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ $(*)$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
  $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, r_1, r_2 racines de $(*)$, y: solution générale de (2)

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  $y = e^{rx}(C_1 x + C_2)$, r: racine double de $(*)$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
  $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$, $r = \alpha \pm i\beta$ solutions complexes de $(*)$

2. Pour trouver y_0

   y_0: une solution particulière de (1) $ay" + by' + cy = f(x)$

   - **Si $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$**, $P_n(x)$ polynôme de degré n.
     Si α n'est pas racine de $(*)$ $\Longrightarrow$ $y_0 = Q_n(x)e^{\alpha x}, d^0 Q_n = n$
     Si α est une racine simple de $(*)$ $\Longrightarrow$ $y_0 = xQ_n(x)e^{\alpha x}$
     Si α est une racine double de $(*)$ $\Longrightarrow$ $y_0 = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$

   - **Si $f(x) = (P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x)e^{\alpha x}$**
     ($d^o P_n = n$ et $d^o \mathrm{Q_m} = \mathrm{m}$)

   Si $\alpha \pm i\beta$ n'est pas racine de $(*)$ $\Longrightarrow$

   $y_0 = \mathrm{e}^{\alpha x}(\mathrm{S_N}(x)\cos\beta x + \mathrm{T_N}(x)\sin\beta x)$,

   $(d^o S_N = d^o \mathrm{T_N} = \mathrm{N}$ avec $N = max(n, m))$

Si $\alpha \pm i\beta$ est racine de $(*) \Longrightarrow$

$$y_0 = \mathrm{x}e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x),$$

$$(d^o S_N = d^o T_N = N \text{ avec } N = max(n,m)).$$

- **Si $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$**, $A, B: Csts$
  Si $i\beta$ n'est pas racine de $(*) \Longrightarrow y_0 = C\cos\beta x + D\sin\beta x$,

  Avec $C, D: Csts$.

  Si $i\beta$ est racine de $(*) \Longrightarrow y_0 = x(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$,

  Avec $C, D: Csts$.

Exemple :

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x \quad (1)$$

$$y'' - 7y' + 6y = 0 \quad (2)$$

1. Cherchons y la solution générale de (2)

   On considère l'équation : $r^2 - 7r + 6 = 0 \quad (*)$

   $\Delta = 49 - 4(6) = 49 - 24 = 25 \Longrightarrow r_1 = 6, r_2 = 1$

   $y = C_1e^{6x} + C_2e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (Solution générale de (2))

2. Cherchons y_0 une solution particulière de (1)
   $f(x) = (x-1)e^x$ de la forme $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}}$
   $\alpha = 1$ et $P_n(x) = (x-2)$, $d^o P_n = 1$
   α est une racine simple de $(*)$ donc on cherche y_0 telle que : $y_0 = xQ_n(x)e^x$ avec $Q_n(x) = ax + b$
   On a alors :

$$y_0 = xe^x(ax+b) = e^x(ax^2+bx)$$
$$y'_0 = e^x(ax^2+bx) + e^x(2ax+b)$$
$$y''_0 = e^x(ax^2+bx) + 2e^x(2ax+b) + e^x(2a)$$

On remplace dans (1), on trouve :

$$-10ax - 5b + 2a = x - 2 \Longrightarrow \begin{cases} -10a = 1 \\ et \\ 2a - 5b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = \frac{9}{25} \end{cases}$$

$y_0 = xe^x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)$ solution particulière de (1)

En conclusion la solution générale de (1) est :

$$Y = y + y_0 = C_1e^{6x} + C_2e^x + xe^x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Université d'Oran Es-Sénia
Faculté des sciences exactes et appliquées — Année universitaire 2020-2021
LMD-1ere Année Génie biomédical

Mathématiques 2 Fiche de TD n°3
équations différentielles

Exercices

I) la fonction $\frac{\ln x}{x}$ est -elle solution de l'équation différentielle: $x^2y' + xy = 1$

II) intégrer les équations différentielles suivantes:

a) $(1+x^2)y' + 3xy = 0$, b) $(1+x^2)y' - \sqrt{1-y^2} = 0$

c) $(1+e^x)yy' = e^x$ déterminer la solution particulière vérifiant la condition $y = 0$ pour $x = 0$.

d) $2x^2y' - y^2 = 4xy$, e) $y' + y = x$, f) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$,

g) $xy' - y = \ln x$, h) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, i) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$

j) $(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$.

III) Intégrer les équations du second ordre suivantes:

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ b) $y'' - y = 1 + x^2$, c) $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$,

d) $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$, e) $y'' + 2y' + 2y = e^x\sin x$.

Exercices supp

exercice examen 2017-2018

1) calculer l'intégrale: $\int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}dx$

2) intégrer l'équation différentielle de Bernouilli suivante:

$$(x-1)y' + y = \frac{2x}{(x+1)}y^2.$$

exercice examen 2018-2019

Soit l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$y' - ytgx = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

a) montrer que $y_0 = \frac{x}{\cos x}$ est une solution de l'équation (1)

b) Trouver la solution générale de l'équation $y' - ytgx = 0$

c) En déduire la solution générale de (1).